



Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov

Amaury Thuillier

► To cite this version:

Amaury Thuillier. Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique non archimédienne. Applications à la théorie d'Arakelov. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2005. Français. NNT: . tel-00010990

HAL Id: tel-00010990

<https://theses.hal.science/tel-00010990>

Submitted on 16 Nov 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'Ordre : 3231

THÈSE

présentée

DEVANT L' UNIVERSITÉ DE RENNES 1

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : **Mathématiques et Applications**

par

Amaury THUILLIER

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

École Doctorale MATISSE

U.F.R. de Mathématiques

**Théorie du potentiel sur les courbes en géométrie analytique
non archimédienne.**

Applications à la théorie d'Arakelov.

Soutenue le jeudi 13 octobre 2005 devant la commission d'Examen

COMPOSITION DU JURY :

M. J.-B. BOST	Rapporteur
M. A. CHAMBERT-LOIR	Directeur de thèse
M. A. DUCROS	Examineur
M. C. FAVRE	Examineur
M. L. MORET-BAILLY	Examineur
M. R. RUMELY	Rapporteur

THÉORIE DU POTENTIEL SUR LES COURBES EN
GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE NON ARCHIMÉDIENNE.
APPLICATIONS À LA THÉORIE D'ARAKELOV.

Amaury THUILLIER

Amaury Thuillier
NWFI-Mathematik
Universität Regensburg
D-93040 Regensburg

courriel : amaury.thuillier@mathematik.uni-regensburg.de

Version du 4 octobre 2005

REMERCIEMENTS

Je dois à l'enthousiasme et à la grande patience d'Antoine Chambert-Loir d'être finalement parvenu à achever cette thèse, commencée il y a quatre ans sur un sujet différent. Depuis mon mémoire de D.E.A., rédigé sous sa direction en 2000, fort nombreuses ont été les occasions d'apprendre des mathématiques à son contact et j'ai essayé, autant que je le pouvais, de profiter de la diversité des ses centres d'intérêts et de l'étendue de ses connaissances. Également nombreuses ont été pour moi les phases de doute et de découragement ; s'il doit les avoir lui aussi partagées, il n'en a rien laissé paraître et m'a prodigué avec constance ses encouragements. Je lui suis en particulier profondément reconnaissant de la confiance qu'il m'a accordée en acceptant, plus d'un an et demi après le début de ma thèse, que j'oriente mon travail dans une direction différente. Je le remercie d'avoir su être toujours disponible, même lors de ses allers et retours hebdomadaires entre Paris et Rennes, et lui souhaite, à l'avenir, des directions de thèses moins tortueuses.

J'exprime ma profonde gratitude à Jean-Benoît Bost et Robert Rumely pour avoir accepté de rédiger un rapport sur mon travail et pour le soin avec lequel ils se sont acquittés de cette tâche ; le présent texte a grandement bénéficié de leur lecture vigilante et des nombreuses remarques qu'ils m'ont faites. Il est par ailleurs évident cette thèse doit son existence même à leurs travaux.

Je suis très heureux que les deux rapporteurs aient accepté d'assister à ma soutenance de thèse et les remercie de s'être spécialement déplacés ; parce que le chemin est long depuis les États-Unis d'Amérique, j'apprécie tout particulièrement la présence de Robert Rumely. L'intérêt d'Antoine Ducros pour la géométrie analytique non archimédienne et sa connaissance des travaux de Berkovich ont sans doute influencé mon travail au cours des trois années que j'ai passées à Rennes. Il y a maintenant plus d'un an que Charles Favre a manifesté de l'intérêt pour mes recherches et m'a parlé des siennes ; il m'a également fait bénéficier des ses commentaires une fois cette thèse achevée. Laurent Moret-Bailly, enfin, m'a accueilli lors de mon arrivée à Rennes et a contribué, par ses remarques, à améliorer ce texte. Je les remercie vivement d'avoir accepté d'appartenir au jury.

Je tiens également à exprimer ma gratitude à Klaus Künnemann : son invitation à venir à Regensburg faire un exposé au mois de mars dernier m'a donné l'impulsion nécessaire pour aborder certains prolongements de ce travail et l'offre de stage post-doctoral qu'il m'a ensuite faite a joué un rôle apaisant lors de l'achèvement de cette thèse.

Je suis heureux d'avoir appartenu à l'IRMAR pendant les trois dernières années : j'y ai trouvé d'excellentes conditions de travail et salue en particulier les membres de l'équipe de géométrie algébrique, ainsi que toutes les personnes avec qui j'ai collaboré dans le cadre de mon monitorat ; je n'oublie pas, non plus, que j'ai eu la chance de faire mes études dans des conditions privilégiées grâce à mon passage par l'ENS Cachan.

L'enthousiasme et les encouragements, maintes fois renouvelés, de Frédéric Paugam m'ont été précieux, en particulier lors de la réorientation de ma thèse opérée au cours de la première année passée à Rennes ; c'est aussi par son intermédiaire que j'ai découvert la ville et l'université de Regensburg. Il a également été fort agréable de partager un bureau avec Pierre Bernard, Sylvain Brochard, Gweltaz Chatel et Valéry Mahé ; pour ce que j'ai appris

à leur côté et leurs encouragements, je les remercie. Je veux également y associer Jérôme Poineau et Christian Naumovic, dont j'ai partagé l'intérêt pour la théorie de Berkovich, et, plus généralement, tous les doctorants rennais croisés lors des diverses séances du séminaire Pampers.

Cette thèse n'existerait enfin pas davantage si je n'avais eu le soutien constant de mes parents, ni pu m'appuyer sur les encouragements malicieux de ma sœur. Je les remercie d'être venus à Rennes pour la soutenance et veux également saluer mes grands-parents, qui auraient sans doute aimé pouvoir y assister.

INTRODUCTION

Présentation générale.

Cette thèse a pour objet de montrer qu'il existe, dans le cadre de la géométrie analytique non archimédienne, une théorie du potentiel formellement identique à celle classiquement développée sur les courbes analytiques complexes (surfaces de Riemann). Considérées simultanément, les théories du potentiel associées aux différentes valeurs absolues sur \mathbb{Q} ont des applications à l'arithmétique des (\mathbb{Q}) -courbes algébriques.

Si cet avatar non archimédien de la classique théorie du potentiel est une émanation naturelle de la géométrie analytique, il convient d'ores et déjà de préciser que les motivations présidant à ce travail sont, initialement, de nature arithmétique. Le théorème de Fekete-Szegő, concernant l'existence d'entiers algébriques dont les plongements complexes satisfont à certaines conditions de nature géométrique, établit un lien entre la théorie du potentiel sur \mathbb{C} et la théorie des nombres. Comme l'ont observé J.-B. Bost [11] et R. Rumely [28], ce théorème peut s'interpréter dans le cadre d'une généralisation de la théorie d'Arakelov originelle faisant intervenir, aux places archimédiennes, des fonctions de Green provenant de la théorie du potentiel.

Reprenant en partie des idées de D. Cantor, R. Rumely parvint à établir une vaste généralisation du théorème de Fekete-Szegő à un cadre adélique ([26]), la droite affine étant de plus remplacée par un ouvert affine (dense) d'une courbe algébrique propre X sur \mathbb{Q} . Il transposa pour ce faire plusieurs résultats de la théorie du potentiel usuelle dans un contexte non archimédien mais les « pathologies » de l'espace topologique $X(\mathbb{C}_p)$, \mathbb{C}_p désignant la complétion d'une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p , sont la source d'un certain nombre de difficultés : l'absence de connexité locale s'oppose à une définition locale de la notion de fonction harmonique tandis que la théorie de la mesure est rendue plus délicate du fait du défaut de compacité locale. La théorie non archimédienne du potentiel, telle que nous la décrivons dans ce travail, utilise l'approche de la géométrie analytique non archimédienne inaugurée par V.G. Berkovich, laquelle fournit, en particulier, des espaces topologiques localement compacts et localement connexes par arcs. Comme nous le constaterons *a posteriori*, le point de vue adopté dans cette thèse prolonge et simplifie les premiers travaux de Rumely.

Il peut être utile de rappeler, dans les grandes lignes, quel fut le développement historique de la géométrie analytique non archimédienne, notre travail étant un sous-produit du point de vue nouveau introduit par V.G. Berkovich. Soit k un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $|\cdot| : k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, supposée non triviale. Les premiers fondements d'une géométrie analytique sur k ont été établis par J. Tate aux alentours de 1960 puis développés par L. Gerritzen, H. Grauert, R. Kiehl, R. Remmert, etc. au cours des années qui suivirent. Les espaces analytiques sont obtenus par recollement de pièces locales, dites *affinoïdes*, décrites en termes d'algèbres de séries formelles convergentes ; toutefois, la nature ultramétrique de la valeur absolue $|\cdot|$ rendant la topologie naturelle totalement discontinue, les procédés de localisation mis en œuvre doivent relever d'une topologie de Grothendieck garantissant suffisamment de « rigidité ». Cette géométrie rigide-analytique permet, par exemple, d'associer à tout k -schéma localement de type fini X un espace (rigide-)analytique X^{an} , dont l'ensemble sous-jacent est celui des points *fermés* de X . Fondamentale mais implicite durant cette première phase, l'idée d'A. Grothendieck de concevoir les espaces (rigide-)analytiques comme fibres génériques de schémas formels (voir l'introduction de [21]) a été introduite et élaborée par M. Raynaud vers 1969, parallèlement aux travaux de D. Mumford sur l'uniformisation non

archimédienne des courbes algébriques. Cette réduction de la géométrie (rigide-)analytique à la géométrie formelle fut développée systématiquement par S. Bosch, W. Lutkebohmert et M. Raynaud une dizaine d'années plus tard.

V.G. Berkovich introduit un point de vue nouveau dans le livre [3] : toute algèbre k -affinoïde A est naturellement une algèbre de fonctions sur un espace topologique compact et localement connexe par arcs $\mathcal{M}(A)$ (son spectre) et les espaces k -analytiques généraux s'obtiennent par recollement de tels espaces $\mathcal{M}(A)$, essentiellement de la même façon que l'on obtient un polyèdre en recollant des polytopes. L'espace topologique sous-jacent à un espace k -analytique X est localement compact et localement connexe par arcs ; on dispose également d'une topologie de Grothendieck sur X , « engendrée » par les domaines k -affinoïdes, et le faisceau structural \mathcal{O}_X de X est défini à partir de la correspondance $\mathcal{M}(A) \mapsto A$; c'est un faisceau sur l'espace topologique sous-jacent ainsi que sur le site de Grothendieck de X .

L'espace $\mathrm{Sp}(A)$ associé à une algèbre k -affinoïde du point de vue de Tate est naturellement un sous-ensemble de $\mathcal{M}(A)$ sur lequel la topologie induite est totalement discontinuë et l'on peut toujours définir la fibre générique \mathcal{X}_η d'un $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -schéma formel \mathcal{X} localement de présentation finie. Comme précédemment, à tout k -schéma localement de type fini X est associé un espace k -analytique X^{an} au sens de Berkovich et l'on dispose d'une application $\rho : X^{\mathrm{an}} \rightarrow X$ (sous-jacente à un morphisme de sites) telle que la fibre de ρ au-dessus d'un point x de X soit en bijection avec l'ensemble des valeurs absolues sur le corps résiduel $\kappa(x)$ de x prolongeant la valeur absolue de k . Dans la théorie rigide-analytique antérieure, seuls interviennent les points *fermés* de X , pour lesquels il existe un unique prolongement de la valeur absolue de k à $\kappa(x)$.

On le voit, l'un des aspects les plus prégnants de l'approche de Berkovich est l'introduction de nombreux points supplémentaires dans les espaces analytiques. Outre le fait d'instaurer la connexité locale faisant défaut dans le cadre initial, la présence de ces points permet de définir des structures polyédrales dans les fibres génériques \mathcal{X}_η de certains $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -schémas formels \mathcal{X} ; de manière générale, l'utilisation des idées de Berkovich enrichit fortement la conception de Grothendieck-Raynaud des espaces analytiques comme fibres génériques de schémas formels.

Venons-en à la théorie du potentiel sur une courbe (strictement) k -analytique lisse X , vue comme un espace localement annelé $(|X|, \mathcal{O}_X)$.

H. Bauer, M. Brelot et J. Doob ont développé une approche axiomatique de la théorie du potentiel classique, ayant comme point de départ un espace topologique muni d'un faisceau \mathcal{H} de (germes de) fonctions réelles continues qui possède les mêmes propriétés formelles que le faisceau des germes de fonctions harmoniques sur \mathbb{R}^n : principe du maximum, principe de Harnack et résolubilité locale du problème de Dirichlet. L'idée initiale de cette thèse était ainsi d'introduire un faisceau \mathcal{H}_X convenable sur l'espace topologique $|X|$ et d'utiliser cette approche axiomatique.

Il est bien connu qu'une fonction réelle h sur une surface de Riemann M est harmonique si et seulement si elle coïncide localement avec la partie réelle d'une fonction holomorphe g ; utilisant la formule $\mathrm{Re}(g) = \log |\exp \circ g|$, il est équivalent de demander que h soit localement de la forme $\mathrm{Log} |f|$, f étant une fonction holomorphe inversible. Cette définition se transpose immédiatement dans un contexte non archimédien et il semble raisonnable de considérer le faisceau \mathcal{F}_X sur $|X|$ associé au préfaisceau faisant correspondre à un ouvert $U \subset |X|$ le sous-espace vectoriel de $C^0(U, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions de la forme $\log |f|$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^\times)$. On constate toutefois rapidement que cette construction ne produit pas, en général, assez de fonctions harmoniques – le problème de Dirichlet, concernant l'existence d'une fonction harmonique sur un ouvert induisant une fonction continue donnée sur la frontière, n'est pas

toujours localement résoluble – ; elle est toutefois correcte lorsque le corps résiduel \tilde{k} de k est algébrique sur un corps fini (ou si X est localement isomorphe à la droite projective), comme on le constatera rétrospectivement au paragraphe 2.3.4.

Une meilleure définition repose sur l'utilisation de structures polyédrales existant naturellement dans les espaces k -analytiques (au sens de Berkovich) ; dans le cas que l'on considère, celui d'une courbe strictement k -analytique lisse X , le théorème de réduction semi-stable de Bosch et Lütkebohmert ([9]) permet de ramener systématiquement l'espace topologique sous-jacent $|X|$ à des *polyèdres entiers* de dimension 1 (ou, de manière équivalente, à des graphes métrisés), naturellement plongés dans $|X|$. Ayant observé que, pour toute section f de \mathcal{O}_X^\times , la fonction $\log |f|$ provient de fonctions *harmoniques* (en un sens évident) sur ces polyèdres, la définition du faisceau \mathcal{H}_X devient claire et ses propriétés fondamentales se déduisent sans difficulté de la théorie du potentiel sur les polyèdres entiers (de dimension 1). Mentionnons que l'obstruction à l'égalité $\mathcal{F}_X = \mathcal{H}_X$ n'est guère mystérieuse : sur certaines composantes irréductibles des fibres spéciales de $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -courbes formelles dont X est la fibre générique, les diviseurs de degré 0 doivent être (rationnellement) principaux, ce qui n'est en général pas le cas.

Nous illustrons cette approche axiomatique en transcrivant la méthode de Perron pour la résolution du problème de Dirichlet ; nous avons toutefois préféré poursuivre le développement de la théorie d'un point de vue un peu différent, dicté par la nature des choses. Les propriétés formelles du faisceau \mathcal{H}_X conduisent en effet à introduire une notion de fonction *lisse*, conçue comme analogue non archimédien de la notion de fonction indéfiniment différentiable, et un « opérateur de Laplace » sur les espaces de fonctions lisses, à valeur dans des espaces de mesures sur $|X|$ et s'annulant sur les fonctions harmoniques. Le point essentiel, maintenant, est que l'on peut étudier cet opérateur dd^c par le biais de la théorie des *distributions*, et ainsi obtenir aisément tous les analogues des résultats de la théorie du potentiel sur les surfaces de Riemann.

Les travaux de Rumely concernant la théorie non archimédienne du potentiel, déjà mentionnés, sont également à l'origine de l'article [18] de E. Kani, dans lequel la géométrie des courbes formelles est clairement reliée à une théorie du potentiel plus ou moins implicite sur les fibres génériques. Cette observation, qui précise l'intuition première d'Arakelov tout en la renversant, est à la source du travail effectué ici.

Nous avons choisi de réduire explicitement la théorie du potentiel sur la courbe strictement k -analytique X à la théorie du potentiel sur les polyèdres entiers de dimension 1. Ce point de vue, s'il a l'avantage d'être très concret, introduit des complications inutiles. Nous terminerons cette présentation en mentionnant qu'il est possible de développer la théorie plus simplement à partir du préfaisceau $Y \leadsto \mathrm{Log} |\mathcal{O}_X(Y)^\times|$ sur le site de Grothendieck X_G de X , permettant d'obtenir directement le faisceau des (germes de) fonctions lisses et l'opérateur dd^c . Cette approche, inspirée par le travail de S. Bloch, H. Gillet et S. Soulé [6] devrait, de plus, permettre d'aborder de manière efficace la théorie du pluripotentiel en dimension supérieure (voir [14] pour des motivations).

L'influence des idées de Berkovich et Kani sur la théorie que nous présentons est évidente ; en fait, cette thèse est le fruit de la lecture de l'article [18] à la lumière des travaux de Berkovich (dont nous n'utilisons que les aspects les plus élémentaires) et son acte de naissance figure très précisément à la page 23 des notes [20] de B. Le Stum...

Plan.

Voici maintenant une brève description du contenu de ce travail.

Le premier chapitre est une suite de considérations très élémentaires sur les polyèdres de dimension 1 munis d'une *structure entière*, laquelle est simplement la donnée, pour chaque arête a , d'un réseau entier dans l'espace vectoriel des fonctions affines réelles sur a . Si ces objets ne sont pas autre chose que des graphes métrisés (déjà introduits, avec des motivations analogues, dans [26], [13], [32] et [29]), ce point de vue est plus adapté à la géométrie formelle. Les polyèdres entiers de dimension 1 fournissent le cadre d'une théorie du potentiel relevant de l'algèbre linéaire et sur laquelle il n'y a pas lieu de s'appesantir ; nous nous contentons de rassembler les résultats qui seront utilisés ultérieurement.

Le deuxième chapitre s'ouvre par des rappels de géométrie analytique sur un corps non archimédien k ; nous en profitons pour fixer certaines conventions et introduire des notations. On y précise, en particulier, que la notion de *courbe k -analytique* utilisée dans ce travail est celle introduite au chapitre 3 de [3] ; ceci garantit que tout point possède un voisinage strictement k -affinoïde.

La suite du chapitre est dévolue à la construction du faisceau \mathcal{H}_X des germes de fonctions harmoniques sur une courbe strictement k -analytique lisse. On procède pour ce faire en deux étapes.

- À toute $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -courbe (formelle) simplement semi-stable \mathcal{X} (voir la définition 2.2.8) est associé un polyèdre entier $S(\mathcal{X})$ de dimension au plus 1 (le *squelette* de \mathcal{X}), d'espace topologique sous-jacent une partie fermée de \mathcal{X}_η , ainsi qu'une rétraction $\tau : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$. Cette construction est fonctorielle pour les morphismes étales et vérifie une condition de fonctorialité faible pour les morphismes quelconques de $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -courbes simplement semi-stables. L'application τ permet de transférer sur \mathcal{X}_η les objets et résultats de la théorie du potentiel sur le polyèdre entier $S(\mathcal{X})$, ce qui peut se concevoir comme une généralisation de la notion de polygone de Newton (d'une série de Laurent). Ceci éclaire par ailleurs la nature des « théories du potentiel locales » introduites par Kani dans [18].
- Utilisant la version rigide-analytique du théorème de réduction semi-stable établie par S. Bosch et W. Lütkebohmert ([9]), les considérations précédentes conduisent à la définition, pour tout espace strictement k -affinoïde rig-lisse Y de dimension 1, de l'espace vectoriel $H(Y)$ des fonctions (réelles) continues sur Y qui sont *harmoniques* sur l'intérieur de Y ; c'est un sous-espace vectoriel de $C^0(Y, \mathbb{R})$. Étant alors donnée une courbe strictement k -analytique lisse X , le faisceau \mathcal{H}_X des germes de fonctions harmoniques est défini comme suit : une fonction (réelle) continue h sur un ouvert U de X est harmonique – c'est-à-dire une section de \mathcal{H}_X sur U – si et seulement si $h|_Y \in H(Y)$ pour tout domaine strictement k -affinoïde $Y \subset U$.

Nous concluons ce chapitre par une comparaison entre le faisceau \mathcal{H}_X et le faisceau de \mathbb{R} -vectoriels sur X associé au préfaisceau $\mathrm{Log} |\mathcal{O}_X^\times|$, mettant en évidence l'obstruction qui s'oppose, en général, à leur coïncidence.

Le troisième chapitre s'ouvre sur la vérification que le faisceau \mathcal{H}_X possède les propriétés fondamentales attendues : principe du maximum, principe de Harnack et résolubilité locale du problème de Dirichlet. Ceci fait, nous introduisons le faisceau \mathcal{SH}_X des (germes de) fonctions *sous-harmoniques* sur la courbe X en recopiant la définition classique : quel que soit l'ouvert $\Omega \subset X$, une fonction semi-continue supérieurement $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est sous-harmonique si elle n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de Ω et, pour tout domaine strictement k -affinoïde $Y \subset \Omega$ et toute fonction $h \in H(Y)$,

$$(h|_{\partial Y} \geq u|_{\partial Y}) \Rightarrow (h \geq u|_Y).$$

Toute la suite du chapitre est consacrée au développement de la théorie du potentiel sur X , c'est-à-dire l'étude des faisceaux \mathcal{H}_X et \mathcal{SH}_X . Leurs propriétés fondamentales permettent d'ores et déjà de transcrire telle quelle la résolution du problème de Dirichlet par la méthode de Perron.

On s'attend à ce que les fonctions sous-harmoniques soient intimement liées aux mesures (de Radon) positives sur l'espace topologique localement compact X ; nous élucidons cette question en l'abordant du point de vue de la théorie des distributions.

Cela commence par la construction du faisceau \mathcal{A}_X^0 des (germes de) fonctions « harmoniques par morceaux », appelées fonctions *lisses*, ainsi que le faisceau \mathcal{A}_X^1 des (germes de) formes *lisses*, lesquelles sont certaines mesures sur X . Les développements du chapitre 2 conduisent naturellement à l'introduction d'un opérateur linéaire $dd^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^1$, de noyau \mathcal{H}_X , qui prolonge le « laplacien discret » sur les polyèdres entiers $S(\mathcal{X})$.

Les espaces vectoriels $A_c^0(X)$ et $A_c^1(X)$ des fonctions et formes lisses à support compact sont naturellement munis d'une topologie localement convexe pour laquelle toutes les formes linéaires sont continues. Les espaces $D^0(X)$ et $D^1(X)$ des *courants* de degré 0 et 1 respectivement sont définis par dualité :

$$D^0(X) = A_c^1(X)' \quad D^1(X) = A_c^0(X)'$$

et munis de la topologie faible. L'espace $A^0(X)$ (resp. $A^1(X)$) se plonge canoniquement dans $D^0(X)$ (resp. $D^1(X)$) et l'on vérifie que l'application linéaire (continue) de $D^0(X)$ dans $D^1(X)$, obtenue par transposition à partir de dd^c , est un *prolongement* de cet opérateur. Ayant observé que $D^0(X)$ s'identifie canoniquement à l'espace vectoriel des fonctions réelles sur une partie $I(X)$ de X , muni de la topologie de la convergence simple, nous sommes donc en mesure d'appliquer dd^c à n'importe quelle fonction réelle sur X (au sens des distributions). On peut dès maintenant préciser que $I(X)$ s'identifie canoniquement à la limite inductive des squelettes $S(\mathcal{X})$ précédemment définis.

L'opérateur $dd^c : D^0(X) \rightarrow D^1(X)$ possède les mêmes propriétés que dans le cadre archimédien :

- il est *régulier*, dans le sens où $A^0(X)$ s'identifie à l'espace des courants T de degré 0 sur X tels que $dd^c T$ appartienne au sous-espace $A^1(X)$ de $D^1(X)$;
- si X est connexe et propre, son image est constituée des courants ρ de degré 1 orthogonaux aux fonctions constantes (tels que $\langle \rho, 1 \rangle = 0$).

Le lien avec l'étude des fonctions sous-harmoniques sur X s'opère en établissant que celles-ci s'identifient aux courants T de degré 0 tels que le courant $dd^c T$ soit *positif*, c'est-à-dire vérifie

$$\langle dd^c T, \varphi \rangle = \langle T, dd^c \varphi \rangle \geq 0$$

pour toute fonction positive $\varphi \in A_c^0(X)$. Comme dans le contexte archimédien, les courants (de degré 1) positifs coïncident avec les mesures de Radon positives sur X ; nous en déduisons la correspondance familière entre mesures positives et fonctions sous-harmoniques (*potentiels*). Tout ceci découle aisément du *théorème d'approximation* suivant : une fonction sous-harmonique u sur X est, sur tout ouvert relativement compact Ω de X , l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de fonctions sous-harmoniques et *lisses*.

Sur le modèle de la théorie classique, nous poursuivons en introduisant des méthodes hilbertiennes; celles-ci trouvent leur origine dans la forme bilinéaire symétrique positive

$$A_c^0(X) \times A_c^0(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto - \int_X \varphi \, dd^c \psi$$

(forme de Dirichlet), version non archimédienne de la forme bilinéaire

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\varphi, \psi) \mapsto - \int_M \varphi \, dd^c \psi = \frac{i}{\pi} \int_M \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \psi,$$

où M est une surface de Riemann compacte et qui généralise, dans le cas d'une valuation discrète, la forme d'intersection sur le groupe des diviseurs « verticaux » sur les modèles entiers de X . La complétion de A_c^0 relativement à ce produit scalaire est un espace de Hilbert réel, noté $W^1(X)$, qui s'identifie canoniquement à un sous-espace vectoriel de $D^0(X)$. Une mesure positive μ sur X est d'*énergie finie* si elle admet un potentiel g dans $W^1(X)$, l'énergie $E(\mu)$ de μ étant alors définie comme le carré de la norme de g .

Nous utilisons ce point de vue pour l'étude des *capacités*. Supposons que X soit propre et soit $Y \subset X$ un domaine k -affinoïde, d'intérieur Ω ; la *capacité relative* d'un compact K de Ω est le nombre réel positif $C(K, \Omega)$ défini par la formule

$$C(K, \Omega) = \left(\inf \{ E_\Omega(\mu) ; \mu \in \text{Prob}(K) \} \right)^{-1},$$

où $\text{Prob}(K)$ est l'ensemble des mesures de probabilité sur K et $E_\Omega(\mu)$ est l'énergie de la mesure μ (relativement à l'ouvert Ω). On pose

$$C(E, \Omega) = \sup \{ C(K, \Omega) ; K \subset E \text{ compact} \}$$

pour tout sous-ensemble E de Ω et la *capacité extérieure* (relative à Ω) est la fonction

$$\begin{aligned} C^*(\cdot, \Omega) : \mathcal{P}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\} \\ E &\mapsto \inf \{ C(U, \Omega) ; U \subset \Omega \text{ ouvert}, E \subset U \}. \end{aligned}$$

C'est une capacité au sens de G. Choquet, dont on montre qu'elle s'annule exactement sur les parties *polaires* de Ω , c'est-à-dire celles contenues dans l'ensemble $\{u = -\infty\}$ des pôles d'une fonction sous-harmonique u sur Ω . Nous avons ici suivi d'assez près la présentation donnée par M. Klimek dans [19], en la simplifiant autant que possible (aucune propriété de quasi-continuité des fonctions sous-harmoniques n'est utilisée).

Les résultats précédents permettent de prouver l'existence des *potentiels d'équilibre* associés à un compact strict et non polaire $K \subset X$: étant donné un point $x \in X - K$, il existe une unique fonction sous-harmonique $g : X - \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$, harmonique sur $X - (K \cup \{x\})$ et nulle sur K en dehors d'une partie polaire, telle que $dd^c g = \nu - \delta_x$, où $\nu \in \text{Prob}(K)$. Comme dans le contexte archimédien, le potentiel d'équilibre d'un point x de $X - K$ conduit à la définition d'une norme $\| \cdot \|_K(x)$ sur la $\mathcal{H}(x)$ -droite vectorielle $x^*(\Omega_X^1)^\vee$; pour tout t non nul dans $x^*(\Omega_X^1)^\vee$, la fonction

$$\begin{aligned} \{\text{compacts de } X - \{x\}\} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ K &\mapsto \begin{cases} \|t\|_K(x) & \text{si } K \text{ n'est pas polaire} \\ 0 & \text{si } K \text{ est polaire} \end{cases} \end{aligned}$$

se prolonge naturellement en une capacité $\text{Cap}_{x,t}$ sur $\mathcal{P}(X - \{x\})$ (au sens de Choquet).

Après quelques exemples de calculs de capacités (relatives) – dans lesquels on suppose le corps k discrètement valué et où l'on s'intéresse à des sous-ensembles de $X(k) -$, le troisième chapitre s'achève sur la démonstration du résultat suivant : toute fonction sous-harmonique u sur une courbe strictement k -analytique lisse X est entièrement déterminée par sa restriction au sous-ensemble X_0 des points $x \in X$ dont le corps résiduel est une extension finie de k ; c'est une application de nos considérations sur les capacités.

Nous utilisons le formalisme développé aux deuxième et troisième chapitres pour donner une présentation de la géométrie d'Arakelov d'une \mathbb{Q} -courbe algébrique propre X ne faisant pas intervenir de modèle entier et intégrant, sur le modèle de l'article [11], des fonctions de Green (archimédiennes et non archimédiennes) ne présentant qu'une régularité de type W^1 . Que la composante non archimédienne de la géométrie d'Arakelov usuelle, c'est-à-dire la théorie de l'intersection sur une \mathbb{Z} -courbe, doivent relever d'une théorie du potentiel adéquate est une observation de E. Kani.

Cette généralisation de la théorie d'Arakelov est illustrée par la version précisée d'un théorème d'équidistribution des suites de points de petite hauteur sur les courbes.

Suite aux travaux de R. Rumely, T. Chinburg a proposé une autre approche de la notion de capacité arithmétique, fondée sur la notion de *capacité sectionnelle* et reposant sur l'étude du covolume de réseaux naturels dans des espaces de sections de faisceaux inversibles. Dans le cas des courbes, la comparaison entre ces deux points de vue est explicitée dans l'article [27]. Nous concluons le quatrième chapitre en montrant comment déduire le résultat principal de [27] du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique usuel (sous la forme que lui donne S.-W. Zhang dans [33]). Notre argument repose sur l'observation que la métrique sous-harmonique associée à un compact (non polaire) K est à la fois

- l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de métriques sous-harmoniques continues (obtenues en élargissant convenablement K),
- l'enveloppe supérieure d'une famille croissante de métriques sous-harmoniques continues (propriété partagée par toutes les métriques sous-harmoniques),

le cas d'une métrique sous-harmonique continue relevant du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique.

Le cinquième et dernier chapitre explicite les relations qu'entretient la théorie développée dans cette thèse avec les travaux de R. Rumely, R. Rumely et M. Baker, E. Kani, C. Favre et M. Jonsson.

Remarque conclusive.

Nous avons expliqué au début de l'introduction que la principale motivation de cette thèse fut d'élaborer une théorie du potentiel sur les courbes analytiques non archimédiennes formellement similaire à la théorie usuelle sur les courbes analytiques complexes – donc en dimension réelle 2. Terminons en relevant explicitement qu'une analogie naturelle apparaît, tout au long de ce travail, avec la théorie du potentiel classique en dimension réelle 1 ; cette observation, prégnante mais implicite dans le texte qui suit, peut en faciliter la lecture.

1. POLYÈDRES ENTIERS

1.1. Généralités

1.1.1. Polytopes

Soient V un espace vectoriel réel de dimension finie et Λ un réseau dans l'espace vectoriel dual V^\vee . L'espace vectoriel réel $\text{Aff}(V) = \mathbb{R} \oplus V^\vee$ des fonctions affines sur V est engendré par le sous-groupe abélien $\Lambda(V) = \mathbb{R} \oplus \Lambda$.

Un *polytope entier* (dans V) est une partie compacte et non vide P de V définie par des inéquations $0 \leq \varphi_1, \dots, 0 \leq \varphi_n$, où $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathbb{R} \oplus \Lambda$. Les restrictions à P des éléments de $\mathbb{R} \oplus \Lambda$ forment un sous-groupe abélien, noté $\Lambda(P)$, de l'espace vectoriel réel $\text{Hom}(P, \mathbb{R})$ des applications de P dans \mathbb{R} ; c'est la somme de \mathbb{R} – identifié au sous-groupe des fonctions constantes – et d'un groupe abélien libre de type fini. Le sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(P, \mathbb{R})$ engendré par $\Lambda(P)$ est noté $\Lambda_{\mathbb{R}}(P)$.

Remarque 1.1.1

1. Un polytope entier est convexe, donc connexe.
2. Étant donné un polytope entier P dans V , défini par des inéquations $0 \leq \varphi_1, \dots, 0 \leq \varphi_n$, $\varphi_i \in \Lambda(V)$, l'application tautologique

$$\iota : P \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}(P)^\vee$$

réalise une bijection de P sur le sous-ensemble

$$\{u \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)^\vee ; \langle u, 1 \rangle = 1 \text{ et } \langle u, \varphi_i|_P \rangle \geq 0, 0 \leq i \leq n\},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignant le crochet de dualité.

3. La remarque précédente permet d'introduire une notion abstraite de *polytope entier* : c'est la donnée d'un couple $(P, \Lambda(P))$, formé d'un ensemble non vide P et d'un sous-groupe $\Lambda(P)$ du groupe abélien $\text{Hom}(P, \mathbb{R})$, appelé *groupe structural* de P , qui satisfait aux conditions suivantes :
 - $\Lambda(P)$ contient le sous-groupe \mathbb{R} des fonctions constantes ;
 - le quotient $\Lambda(P)/\mathbb{R}$ est un groupe abélien libre de type fini ;
 - notant $\Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ le sous-espace vectoriel de $\text{Hom}(P, \mathbb{R})$ engendré par $\Lambda(P)$, l'application tautologique

$$\iota : P \rightarrow \Lambda_{\mathbb{R}}(P)^\vee$$

réalise une bijection de P sur une partie compacte de l'hyperplan d'équation $\langle u, 1 \rangle = 1$ définie par un nombre fini d'inégalités $\langle u, \varphi \rangle \geq 0$, $\varphi \in \Lambda(P)$. L'ensemble P est muni de la topologie faisant de ι un homéomorphisme et l'on notera abusivement P le polytope entier $(P, \Lambda(P))$ si cela ne prête pas à confusion.

Un morphisme d'un polytope entier P dans un polytope entier P' est une application $f : P \rightarrow P'$ telle que l'homomorphisme $f^* : \text{Hom}(P', \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(P, \mathbb{R})$ envoie $\Lambda(P')$ dans $\Lambda(P)$. Un *sous-polytope entier* d'un polytope entier P est une partie non vide de P définie par un nombre fini d'inéquations de la forme $0 \leq \varphi$, $\varphi \in \Lambda(P)$.

Les *faces* d'un polytope entier P sont les parties non vides de P définies par une équation $\varphi = 0$, $\varphi \in \Lambda(P)$ étant une fonction *positive* sur P ; ce sont des sous-polytopes entiers de P .

La *dimension* d'un polytope entier P , notée $\dim(P)$, est par définition le rang du groupe abélien libre $\Lambda(P)/\mathbb{R}$ et le *bord* ∂P de P est la réunion des faces de dimension $< \dim(P)$; le

complémentaire $P - \partial P$ est l'intérieur de P . La dimension de P coïncide avec la dimension topologique de son intérieur.

Une *décomposition élémentaire* d'un polytope entier P est la donnée d'une famille finie \mathcal{D} de sous-polytopes entiers de P vérifiant les conditions suivantes :

- (i) pour tout $Q \in \mathcal{D}$, chacune des faces de Q appartient à \mathcal{D} ;
- (ii) pour tous $Q, Q' \in \mathcal{D}$, $Q \cap Q' = \emptyset$ ou est une face de Q et Q' ;
- (iii) P est la réunion des $Q \in \mathcal{D}$.

Remarque 1.1.2. — Si \mathcal{D} est une décomposition élémentaire de P , la condition (ii) implique que deux sous-polytopes distincts $Q, Q' \in \mathcal{D}$ ont des intérieurs disjoints et les conditions (i) et (iii) montrent que P est la réunion disjointe des intérieurs des $Q \in \mathcal{D}$.

Étant donné un polytope entier P , une application continue $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *affine par morceaux* s'il existe une décomposition élémentaire \mathcal{D} de P telle que, pour tout $Q \in \mathcal{D}$, la restriction de f à Q appartienne à $\Lambda_{\mathbb{R}}(Q)$. L'ensemble des fonctions affines par morceaux sur P est un \mathbb{R} -espace vectoriel noté $A^0(P)$ et $A_{\mathbb{Z}}^0(P)$ désigne le sous-groupe abélien des fonctions continues et affines par morceaux f pour lesquelles il existe une décomposition élémentaire \mathcal{D} de P telle que $f|_Q \in \Lambda(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{D}$.

Remarque 1.1.3. — Soit P un polytope entier ; la catégorie $\mathbf{C}(P)$, dont les objets sont les sous-polytopes entiers de P et les morphismes les inclusions, est munie d'une topologie de Grothendieck naturelle pour laquelle les familles couvrantes sont les recouvrements finis. Le faisceau associé au préfaisceau $Q \mapsto \Lambda(Q)$ (resp. $Q \mapsto \Lambda_{\mathbb{R}}(Q)$) sur $\mathbf{C}(P)$ n'est autre que le foncteur $Q \mapsto A_{\mathbb{Z}}^0(Q)$ (resp. $Q \mapsto A^0(Q)$).

1.1.2. Polyèdres

Soit S un espace topologique séparé dont les composantes connexes sont dénombrables à l'infini ; un *atlas \mathbb{Z} -polyédral* sur S est la donnée d'une famille τ de triplets (V, P, φ) , constitués d'une partie compacte V de S , d'un polytope entier P et d'un homéomorphisme φ de V sur P , qui satisfait aux conditions suivantes :

1. pour tous $(V, P, \varphi), (V', P', \varphi') \in \tau$, $V \cap V' = \emptyset$ ou $\varphi(V \cap V')$ (resp. $\varphi'(V \cap V')$) est un sous-polytope entier de P (resp. P') et $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ induit un isomorphisme entre les polytopes entiers $\varphi(V \cap V')$ et $\varphi'(V \cap V')$;
2. pour tout point $x \in S$, il existe $(V_1, P_1, \varphi_1), \dots, (V_n, P_n, \varphi_n) \in \tau$ tels que $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$ et que $V_1 \cup \dots \cup V_n$ soit un voisinage de x dans S .
3. pour tout compact K de S , il n'existe qu'un nombre fini de cartes $(V, P, \varphi) \in \tau$ telles que $\varphi(V) \cap K \neq \emptyset$.

Deux atlas \mathbb{Z} -polyédraux τ et τ' sur S sont dits *équivalents* si la réunion $\tau \cup \tau'$ est un atlas \mathbb{Z} -polyédral sur S .

DÉFINITION 1.1.4. — Un *polyèdre entier* est la donnée d'un espace topologique séparé S et d'une classe d'équivalence d'atlas \mathbb{Z} -polyédraux sur S .

DÉFINITION 1.1.5. — Un *sous-polytope d'un polyèdre entier* S est une partie compacte non vide V de S figurant dans un atlas \mathbb{Z} -polyédral.

Remarque 1.1.6. — L'espace topologique sous-jacent à un polyèdre entier est localement compact.

La *dimension* d'un polyèdre entier S en un point x est le maximum $\dim_x(S)$ des dimensions des polytopes figurant dans un atlas \mathbb{Z} -polyédral et contenant x ; c'est une fonction semi-continue supérieurement de x et la dimension de S est définie comme la borne supérieure des $\dim_x(S)$, $x \in S$.

Une application $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ sur un polyèdre entier S est dite *affine par morceaux* s'il existe un atlas \mathbb{Z} -polyédral τ définissant la structure de S tel que, pour tout $(V, P, \varphi) \in \tau$, $f \circ \varphi^{-1} \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ (cette condition ne dépend pas du choix de τ); l'espace vectoriel réel des fonctions affines par morceaux sur S est noté $A^0(S)$ et $A_{\mathbb{Z}}^0(S)$ désigne le sous-groupe des f telles que $f \circ \varphi^{-1} \in \Lambda(P)$ pour tout $(V, P, \varphi) \in \tau$. Une fonction affine par morceaux est continue.

Un morphisme entre deux polyèdres entiers S, S' est une application continue $f : S \rightarrow S'$ vérifiant la condition suivante : pour des atlas τ, τ' convenables sur S, S' , il existe, pour toute carte $(V, P, \varphi) \in \tau$, une carte $(V', P', \varphi') \in \tau'$ telle que $f(V) \subset V'$ et $\varphi' \circ f \circ \varphi^{-1}$ soit un morphisme de polytopes entiers.

DÉFINITION 1.1.7. — *Soit S un polyèdre entier. Un domaine polyédral dans S est une partie $S' \subset S$ qui est la réunion d'une famille localement finie de sous-polytopes entiers.*

La catégorie $\mathbf{C}(S)$, dont les objets sont les domaines polyédraux de S et les morphismes les inclusions, est munie d'une topologie de Grothendieck naturelle engendrée par les recouvrements localement finis par des sous-polytopes. Le préfaisceau

$$\mathbf{C}(S)^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}, \quad S' \mapsto A^0(S')$$

est un faisceau.

On dira qu'un morphisme de polyèdres entiers $f : S' \rightarrow S$ est un *isomorphisme G -local* si c'est un isomorphisme localement pour les topologies de Grothendieck sur S et S' . En clair, cela signifie qu'il existe des recouvrements admissibles \mathcal{U} et \mathcal{U}' de S et S' respectivement tels que, pour tout $P' \in \mathcal{U}'$, $f(P') \in \mathcal{U}$ et $f|_{P'}$ réalise un isomorphisme de P' sur P . En guise d'exemple, on peut noter que, pour tout recouvrement admissible \mathcal{U} d'un polyèdre entier S , la somme disjointe S' des éléments de \mathcal{U} est un polyèdre entier et le morphisme canonique $S' \rightarrow S$ est un isomorphisme G -local.

Soient P un polytope entier de dimension 1 et x un point de ∂P . Il existe, par définition de ∂P , une fonction non constante $\varphi \in \Lambda(P)$ telle que $0 \leq \varphi$ et $\varphi(x) = 0$; on peut en outre choisir φ telle que son image dans $\Lambda(P)/\mathbb{R}$ soit un générateur de ce groupe abélien libre de rang 1. L'unique fonction dans $\Lambda(P)$ satisfaisant à ces conditions est notée t_x .

L'application $t_x : P \rightarrow \mathbb{R}$ est un homéomorphisme de P sur un segment $[0, a]$, $0 < a$; le bord ∂P de P est donc constitué de x et du point x' de P tel que $t_x(x') = a$; notant t la fonction coordonnée canonique sur \mathbb{R} , t_x réalise un isomorphisme entre les polytopes entiers P et $([0, t_x(x')], \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}t)$.

Un polyèdre entier purement de dimension un n'est pas autre chose qu'un *graphe localement métrisé*, c'est-à-dire un espace topologique séparé et localement métrisé S dans lequel tout point x admet un système fondamental de voisinages de la forme $V_1 \cup \dots \cup V_n$, où V_1, \dots, V_n sont des compacts de S contenant x et isométriques à des segments de \mathbb{R} . Le groupe $A_{\mathbb{Z}}^0(S)$ est formé des applications $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ pour lesquelles il existe, en tout point $x \in S$, un voisinage $V_1 \cup \dots \cup V_n$ de la forme précédente tel que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et toute injection isométrique $j : V_i \hookrightarrow \mathbb{R}$, $f|_{V_i} = j^* f_i$, f_i étant une fonction affine dont la dérivée est un entier.

1.2. Théorie du potentiel sur les polyèdres de dimension 1

1.2.1. Fonctions harmoniques

Soit S un polyèdre entier de dimension au plus 1 ; étant donné un point $x \in S$ tel que $\dim_x S = 1$, il existe des sous-polytopes entiers V_1, \dots, V_n de S tels que

- (i) $\dim(V_i) = 1$,
- (ii) x soit une face de V_1, \dots, V_n et $V_i \cap V_j = \{x\}$ si $i \neq j$,
- (iii) $V_1 \cup \dots \cup V_n$ soit un voisinage de x dans S .

L'espace topologique $V = V_1 \cup \dots \cup V_n$ est homéomorphe à la somme de n copies de $[0, 1]$ amalgamées en 0 et l'ensemble $\pi_0(V - \{x\})$ ne dépend donc pas du choix du voisinage connexe V assez petit de x . Il en va plus généralement de même pour tout point x d'un polyèdre entier de dimension au plus 1, cet ensemble étant vide si $\dim_x(S) = 0$. Il est noté $T_x S$ et appelé le *cône tangent* à S en x .

Il existe une notion naturelle – bien que d'intérêt limité du point de vue adopté dans la suite – de *bord* d'un polyèdre entier de dimension (au plus) 1, compatible avec celle précédemment définie lorsque S est un polytope.

DÉFINITION 1.2.1. — *Le bord d'un polyèdre entier S de dimension au plus 1 est l'ensemble ∂S des points x de S tel que $T_x S$ soit de cardinal exactement un.*

Soit toujours S un polyèdre entier S de dimension au plus 1. On appellera *décomposition élémentaire* de S un atlas \mathbb{Z} -polyédral \mathcal{D} satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) pour tout sous-polytope $P \in \mathcal{D}$ et toute face P' de P , $P' \in \mathcal{D}$ (stabilité par passage aux faces) ;

(ii) pour tous sous-polytopes $P, P' \in \mathcal{D}$, $P \cap P' = \emptyset$ ou $P \cap P'$ est une face de P et P' .

On notera $\mathcal{D}[\ell]$ l'ensemble des $P \in \mathcal{D}$ tels que $\dim(P) = \ell$ ($0 \leq \ell \leq 1$).

Il est facile d'établir l'existence d'une telle décomposition : partant d'un atlas τ , considérons l'atlas τ' obtenu en ajoutant, pour chaque polytope $P \in \tau$, tous les polytopes $P \cap P'$, $P' \in \tau$; ce nouvel atlas est stable par intersection ; on définit alors τ'_0 comme la collection de tous les polytopes $P \in \tau'$ satisfaisant à la condition :

$$\forall P' \in \tau', (P \subset P' \text{ et } \dim(P) = \dim(P')) \Rightarrow P = P'$$

et l'on obtient une décomposition élémentaire \mathcal{D} de S en considérant toutes les faces des polytopes $P \in \tau'_0$.

Quel que soit le polytope entier S de dimension au plus 1 muni d'une décomposition élémentaire \mathcal{D} , une fonction $w : \mathcal{D}[1] \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ définit, pour tout $x \in S$, une application $w_x : T_x S \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$. La définition suivante est introduite en vue des applications aux courbes k -analytiques lisses (cf. chapitre 2).

DÉFINITION 1.2.2. — *Si S est un polyèdre entier de dimension au plus 1, un poids w sur S est la donnée, pour tout point x de S tel que $\dim_x(S) = 1$, d'une application w_x de $T_x S$ dans $\mathbb{R}_{>0}$, la collection des w_x , $x \in S$, provenant d'une décomposition élémentaire de S .*

Un polyèdre entier de dimension au plus 1 et muni d'un poids est dit pondéré.

Remarque 1.2.3

1. Nous dirons que le poids w est *constant* sur un sous-polytope P de S si : pour tous $x, x' \in P$ et $t, t' \in T_x P$, $w_x(t) = w_{x'}(t')$.
2. Soient (S, w) et (S', w') deux polyèdres entiers pondérés et f un isomorphisme G -local de S' sur S ; on dira que f est *compatible* aux poids (ou encore que c'est un isomorphisme

G -local de polyèdres entiers pondérés) si, pour tout point $x \in S$ et tout élément $t \in T_x S$:

$$w_x(t) = \sum_{x' \in f^{-1}(x)} \sum_{t' \in T_{x'} S' ; T_x f(t') = t} w_{x'}(t'),$$

où $T_{x'} f$ est l'application de $T_{x'} S'$ dans $T_x S$ induite par f .

Remarque 1.2.4

Les polyèdres entiers que l'on rencontrera au chapitre 2 proviendront des graphes de réduction de courbes algébriques nodales, lesquels sont munis d'une décomposition élémentaire canonique. Dans ce contexte, les sous-polytopes de dimension 1 correspondront aux points singuliers des courbes considérées et les poids seront simplement les degrés résiduels de ces points.

Un polyèdre entier de dimension au plus 1 est muni, par défaut, du poids constant égal à 1 : pour tout $x \in S$ tel que $\dim_x(S) = 1$, $w_x \equiv 1$.

DÉFINITION 1.2.5. — Soit S un polyèdre entier de dimension au plus 1. Un sous-polyèdre de S est un domaine polyédral $S' \subset S$ tel que $S' - \partial S'$ soit ouvert dans S .

Remarque 1.2.6. — Étant donné un polyèdre entier S et un domaine polyédral $S' \subset S$, l'ensemble $T_x S'$ s'identifie canoniquement à un sous-ensemble de $T_x S$ pour tout point $x \in S'$; cela permet de munir S' du poids induit par celui de S . Le domaine polyédral S' est un sous-polyèdre de S si et seulement si $T_x S' = T_x S$ pour tout $x \in S' - \partial S'$.

CONVENTION. À partir de maintenant, tous les polyèdres entiers considérés sont de dimension au plus 1 et pondérés ; on parlera simplement de *polyèdres entiers*.

Soient P un polytope entier de dimension 1 et x, x' les deux points du bord de P . L'unique fonction $t_x \in \Lambda(P)$ telle que $t_x \geq 0$, $t_x(x) = 0$ et dont l'image engendre $\Lambda(P)/\mathbb{R}$ est une base de l'espace vectoriel $\{f \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P) \mid f(x) = 0\}$ et l'on note $\lambda_{P,x}$ l'application \mathbb{R} -linéaire de $\Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ dans \mathbb{R} telle que

$$f = f(x) + \lambda_{P,x}(f)t_x,$$

$f \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$. De manière équivalente, l'application $t_x : P \rightarrow \mathbb{R}$ réalise un isomorphisme de P sur le polytope entier $([0, t_x(x')], \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}t)$ et $f = t_x^*(f(x) + \lambda_{P,x}(f)t)$.

S'il n'y a pas de risque de confusion, cette application sera simplement notée λ_x .

L'application \mathbb{R} -linéaire $\lambda_x : \Lambda_{\mathbb{R}}(P) \rightarrow \mathbb{R}$ se prolonge en une application \mathbb{R} -linéaire de $A^0(P)$ dans \mathbb{R} , encore notée λ_x : si $f \in A^0(P)$, il existe un sous-polytope entier Q de P tel que $\dim(Q) = 1$, x soit une face de Q et $f|_Q \in \Lambda_{\mathbb{R}}(Q)$; le réel $\lambda_{Q,x}(f)$ ne dépend pas du choix de Q .

La fonction $t_x(x') - t_x \in \Lambda(P)$ est positive sur P , nulle en x' et son image dans le groupe abélien $\Lambda(P)/\mathbb{R}$, coïncidant avec celle de $-t_x$, est un générateur. Il en résulte l'égalité $t_{x'} = t_x(x') - t_x$ et donc, pour toute fonction $f \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$,

$$\lambda_x(f) + \lambda_{x'}(f) = 0.$$

Tout point y intérieur à P détermine une décomposition élémentaire $\mathcal{D} = \{x, y, x', P', P''\}$ de P , où P', P'' sont des sous-polytopes entiers de P de dimension 1, de bords $\{x, y\}$, $\{y, x'\}$ respectivement. Étant donnée une fonction f dans $\Lambda_{\mathbb{R}}(P)$, $f|_{P'} \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P')$, $f|_{P''} \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P'')$ et donc

$$\lambda_{P',x}(f) + \lambda_{P',y}(f) = \lambda_{P'',x'}(f) + \lambda_{P'',y}(f) = 0 ;$$

utilisant l'égalité $\lambda_{P',x}(f) + \lambda_{P'',x'}(f) = 0$, il en découle finalement :

$$\lambda_{P',y}(f) + \lambda_{P'',y}(f) = 0.$$

Soient S un polyèdre entier et x un point de S tel que $\dim_x(S) = 1$. Étant donnés des sous-polytopes entiers P_1, \dots, P_n de S tels que

- (i) $\dim(P_i) = 1$,
 - (ii) x soit une face de P_1, \dots, P_n et $P_i \cap P_j = \{x\}$ si $i \neq j$,
 - (iii) $P_1 \cup \dots \cup P_n$ soit un voisinage de x dans S ,
- $T_x S$ s'identifie à $\pi_0(P_1 \cup \dots \cup P_n - \{x\})$ et l'application \mathbb{R} -linéaire

$$A^0(S) \xrightarrow{\text{res}} A^0(P_i) \xrightarrow{\lambda_{P_i, x}} \mathbb{R}$$

ne dépend que du point $t \in T_x S$ associé à P_i ; elle est notée $\lambda_{x, t}$. Rappelant que S est muni d'un poids w , nous introduisons une forme \mathbb{R} -linéaire sur $A^0(S)$ en posant

$$\lambda_x = \sum_{t \in T_x S} w_x(t) \lambda_{x, t}.$$

Cette dernière formule garde en sens lorsque x est un point isolé de S : $T_x S = \emptyset$ et donc $\lambda_x(f) = 0$ pour toute fonction $f \in A^0(S)$.

Il existe, pour toute fonction $f|_Q \in A^0(S)$, une décomposition élémentaire \mathcal{D} de S telle que $f|_Q \in \Lambda_{\mathbb{R}}(Q)$ pour tout $Q \in \mathcal{D}$; tous les points $x \in S$ tels que $\lambda_x(f) \neq 0$ sont alors contenus dans l'ensemble localement fini des polytopes $Q \in \mathcal{D}$ de dimension 0. Notant $A^1(S)$ l'espace vectoriel des mesures réelles sur S dont le support est localement fini, la formule

$$\text{dd}^c f = \sum_{x \in S} \lambda_x(f) \delta_x$$

définit une application linéaire $\text{dd}^c : A^0(S) \rightarrow A^1(S)$.

DÉFINITION 1.2.7. — *Étant donnés un polyèdre entier S et un point $x \in S$, une fonction affine par morceaux h sur S est dite harmonique en x si $\lambda_x(h) = 0$.*

Pour tout sous-ensemble localement fini Γ de S , une fonction affine par morceaux sur S est dite harmonique sur $S - \Gamma$ si elle est harmonique en tout point de $S - \Gamma$, c'est-à-dire si le support de $\text{dd}^c f$ est contenu dans Γ .

L'ensemble des fonctions continues sur S et harmoniques sur $S - \Gamma$ est un sous-espace vectoriel de $A^0(S)$, noté $H(S, \Gamma)$.

Remarque 1.2.8

1. Soient Γ une partie localement finie de S et \mathcal{D} une décomposition élémentaire de S telle que :
 - le poids w soit constant sur chaque polytope $P \in \mathcal{D}[1]$;
 - $\Gamma \subset \mathcal{D}[0]$.
Étant donnés une fonction $h \in H(S, \Gamma)$ et un polytope entier $P \in \mathcal{D}[1]$, la remarque précédente montre que la restriction de h à P est harmonique sur $P - \partial P$ relativement au poids induit par w ; puisque celui-ci est constant, $h|_P \in H(P, \partial P) = \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$.
2. Étant donnés une partie localement finie Γ de S et un sous-polyèdre entier $S' \subset S$, $\Gamma' = \Gamma \cap S'$ est une partie localement finie de S' . Pour toute fonction $h \in H(S, \Gamma)$, la fonction $h|_{S'}$ appartient à l'espace $H(S', \Gamma' \cup \partial S')$: en effet, l'injection $S' \hookrightarrow S$ est un isomorphisme au voisinage de tout point de $S' - \partial S'$ et donc $\lambda_x(h|_{S'}) = \lambda_x(h)$ pour tout point $x \in S' - \partial S'$.
3. Soit Γ une partie localement finie de S ; il existe, pour toute fonction $h \in H(S, \Gamma)$, une décomposition élémentaire \mathcal{D} de S telle que $h|_P \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ pour tout polytope $P \in \mathcal{D}[1]$.

4. Soit $f : (S', w') \rightarrow (S, w)$ un isomorphisme G -local de polyèdres pondérés, surjectif ; étant donnée une fonction $\varphi \in A^0(S)$,

$$\begin{aligned}
f_*(dd^c f^* \varphi) &= f_* \left(\sum_{x' \in S'} \sum_{t' \in T_{x'} S'} \lambda_{x', t'}(f^* \varphi) w'_{x'}(t') \right) \\
&= \sum_{x \in S} \sum_{t \in T_x S} \lambda_{x, t}(\varphi) \left(\sum_{x' \in f^{-1}(x)} \sum_{t' \in T_{x'} S' ; T_{x'} f(t') = t} w'_{x'}(t') \right) \\
&= \sum_{x \in S} \sum_{t \in T_x S} \lambda_{x, t}(\varphi) w_x(t) \\
&= dd^c \varphi.
\end{aligned}$$

Il convient enfin de remarquer le fait suivant : quelle que soit la partie localement finie Γ de S , toute fonction $h \in H(S, \Gamma)$ est localement constante au voisinage des points de ∂S n'appartenant pas à Γ . En effet, étant donné $x \in \partial S \cap (X - \Gamma)$, $\dim_x(S) = 1$ et il existe un sous-polytope entier P de S qui est un voisinage de x et tel que $h|_P \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$; notant t l'unique point de $T_x S$, on a alors $0 = \lambda_x(h) = w_x(t) \lambda_{P, x}(h|_P)$, donc $\lambda_{P, x}(h|_P) = 0$ puisque $w_x(t) > 0$, et $h|_P$ est constante.

1.2.2. Propriétés

Soient S un polyèdre entier et Γ une partie localement finie de S ; nous allons rapidement passer en revue les principales propriétés attachées au sous-espace $H(S, \Gamma)$ de $A^0(S)$.

PROPOSITION 1.2.9. — (Principe du maximum)

Une fonction $h \in H(S, \Gamma)$ admet un extremum en un point $x \in S - \Gamma$ si et seulement si h est localement constante en x .

Démonstration. L'assertion est triviale au voisinage de tout point isolé de S .

Considérons des sous-polytopes entiers P_1, \dots, P_n de S tels que $\dim(P_i) = 1$, x soit une face de P_1, \dots, P_n , $P_1 \cup \dots \cup P_n$ soit un voisinage de x et $h|_{P_i} \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P_i)$. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, P_i détermine un point t_i dans $T_x S$ et $\lambda_{x, t_i}(h) = \lambda_{P_i, x}(h|_{P_i})$. Reprenant les notations introduites au paragraphe 1.2.1,

$$h|_{P_i} = h(x) + \lambda_{P_i, x}(h) t_{i, x}$$

et, la fonction $t_{i, x}$ étant strictement positive sur $P_i - \{x\}$, h a un minimum (resp. maximum) local en x si et seulement si $\lambda_{P_i, x}(h) \geq 0$ (resp. $\lambda_{P_i, x}(h) \leq 0$) pour tout i . Puisque $w_x(t_i) > 0$ pour tout i et $\sum_{1 \leq i \leq n} w_x(t_i) \lambda_{P_i, x}(h) = 0$ par harmonicité de h en x , il en résulte que h admet un extremum local en x si et seulement si $\lambda_{P_i, x}(h) = 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire si et seulement si h est constante au voisinage de x . \square

COROLLAIRE 1.2.10. — Si S est compact et si Γ rencontre toutes les composantes connexes de S ,

$$\max_S h = \max_{\Gamma} h \quad \text{et} \quad \min_S h = \min_{\Gamma} h$$

pour toute fonction $h \in H(S, \Gamma)$.

COROLLAIRE 1.2.11. — Supposons S compact et connexe ; si $\text{Card}(\Gamma) \leq 1$, toute fonction dans $H(S, \Gamma)$ est constante.

PROPOSITION 1.2.12. — (Principe de Harnack)

Soient Γ une partie localement finie de S et (h_n) une suite croissante dans $H(S, \Gamma)$; sur chacune des composantes connexes de $S - \Gamma$, l'une des deux assertions suivantes est vraie :

1. la suite (h_n) converge localement uniformément vers $+\infty$;
2. la suite (h_n) converge localement uniformément vers une fonction harmonique.

Démonstration. Pour tout polytope entier P de dimension 1, une suite croissante (h_n) dans $\Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ converge, localement uniformément sur $P - \partial P$, vers $+\infty$ ou converge, uniformément sur P , vers un élément h de $\Lambda_{\mathbb{R}}$; dans ce dernier cas, $\lambda_x(h)$ est la limite des $\lambda_x(h_n)$ pour tout point $x \in \partial P$.

Soit \mathcal{D} une décomposition élémentaire de S telle que le poids w soit constant sur chaque $Q \in \mathcal{D}[1]$ et $\Gamma \subset \mathcal{D}[0]$. Ce que l'on vient de dire s'applique à chaque $P \in \mathcal{D}[1]$.

Soit Ω l'ensemble des points de $S - \Gamma$ en lesquels la suite (h_n) n'est pas majorée. C'est une partie ouverte de $S - \Gamma$: étant donné un point $x \in \Omega$, il existe $P \in \mathcal{D}[1]$ tel que $x \in P - \partial P \subset \Omega$ si $x \in S - \mathcal{D}[0]$, tandis que $P - \partial P \subset \Omega$ pour tout $P \in \mathcal{D}[1]$ tel que $x \in \partial P$ si $x \in \mathcal{D}[0] - \Gamma$.

Le complémentaire Ω' de Ω dans $S - \Gamma$ est également une partie ouverte : étant donné un point $x \in \Omega'$, il existe $P \in \mathcal{D}[1]$ tel que $x \in P \subset \Omega$ si $x \in S - \mathcal{D}[0]$; dans le cas où $x \in \mathcal{D}[0] - \Gamma$, l'harmonicité des fonctions h_n au point x implique $P \subset \Omega'$ pour tout $P \in \mathcal{D}[1]$ tel que $x \in \partial P$: en effet, quel que soit $P \in \mathcal{D}[1]$ tel que $x \in \partial P = \{x, x'\}$, la suite de terme général

$$\lambda_{P,x} = \frac{h_n(x') - h_n(x)}{t_x(x')}$$

est minorée; puisque les fonctions h_n sont harmoniques en x , il en découle que la suite $(\lambda_{P,x}(h_n))$ est également majorée, donc que P est contenu dans Ω' .

Nous venons de vérifier que le sous-ensemble Ω de $S - \Gamma$ est ouvert et fermé; c'est par conséquent une réunion de composantes connexes de $S - \Gamma$, sur lesquelles la suite (h_n) converge localement uniformément vers $+\infty$.

Soit C une composante connexe de $S - \Gamma$ disjointe de Ω . La suite (h_n) converge uniformément sur tout $P \in \mathcal{D}[1]$, $P \subset \overline{C}$, vers une fonction $h_P \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$. Il existe une fonction $h \in H(C, \mathcal{D}[0] \cap C)$ et une seule telle que

$$h|_P = h_P$$

pour tout $P \in \mathcal{D}[1]$, $P \subset \overline{C}$. Quel que soit le point x de \overline{C} appartenant à $(\mathcal{D}[0] - \Gamma) \cap C$,

$$\lambda_x(h) = \lim_n \lambda_x(h_n) = 0$$

et donc h est harmonique sur $C - \Gamma$. La démonstration de la proposition est achevée. \square

PROPOSITION 1.2.13. — Soit S un polyèdre; pour toutes fonctions $h_1, h_2 \in A^0(S)$ dont l'une au moins s'annule en dehors d'une partie compacte de S ,

$$\int_S h_1 dd^c h_2 = \int_S h_2 dd^c h_1.$$

Démonstration. Soit Γ une partie localement finie de S telle que $h_1, h_2 \in H(S, \Gamma)$ et soit \mathcal{D} une décomposition élémentaire de S telle que $\Gamma \subseteq \mathcal{D}[0]$; quitte à raffiner la décomposition \mathcal{D} ,

on peut supposer que le poids w de S provient d'une fonction sur $\mathcal{D}[1]$. Puisque

$$\begin{aligned} \int_S h_1 dd^c h_2 &= \sum_{x \in \mathcal{D}[0]} h_1(x) \lambda_x(h_2) \\ &= \sum_{x \in \mathcal{D}[0]} h_1(x) \sum_{P \in \mathcal{D}[1]; x \in P} \lambda_{P,x}(h_2) w_x(P) \\ &= \sum_{P \in \mathcal{D}[1]} \sum_{x \in \partial P} h_1(x) \lambda_{P,x}(h_2) w_x(P) = \sum_{P \in \mathcal{D}[1]} \int_P h_1 dd^c h_2, \end{aligned}$$

toutes les sommes considérées étant finies, il suffit de vérifier la formule lorsque $S = P$ est un polytope entier de dimension 1.

Soit P un polytope entier de dimension un, de bord $\{x, x'\}$. Toute fonction $h \in H(P, \partial P) = \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$ s'écrit $h = h(x) + \lambda_x(h)t_x = h(x') + \lambda_{x'}(h)t_{x'}$ et $dd^c h = \lambda_x(h)\delta_x + \lambda_{x'}(h)\delta_{x'} = \lambda_x(h)(\delta_x - \delta_{x'})$; ainsi, quelles que soient les fonctions $h_1, h_2 \in \Lambda_{\mathbb{R}}(P)$,

$$\begin{aligned} \int_P h_1 dd^c h_2 &= \lambda_x(h_2)(h_1(x) - h_1(x')) = \lambda_x(h_2)\lambda_{x'}(h_1)t_{x'}(x) \\ &= \lambda_x(h_2)\lambda_{x'}(h_1)t_{x'}(x) \\ &= \int_P h_2 dd^c h_1. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 1.2.14. — *Pour toute fonction $h \in A^0(S)$ à support compact, $\int_S dd^c h = 0$.*

1.2.3. Problèmes de Dirichlet et de Neumann

PROPOSITION 1.2.15. — *Pour tout polyèdre entier compact S et tout sous-ensemble fini $\Gamma \subset S$ rencontrant chacune des composantes connexes de S , l'application \mathbb{R} -linéaire*

$$\begin{aligned} \rho : H(S, \Gamma) &\rightarrow \mathbb{R}^\Gamma \\ h &\mapsto h|_\Gamma \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. La preuve de cette proposition se réduit à de l'algèbre linéaire : Γ étant fini et l'application linéaire ρ étant injective en vertu du principe du maximum (proposition 1.2.9), la proposition est équivalente à l'inégalité

$$\dim H(S, \Gamma) \geq \text{Card}(\Gamma).$$

On peut supposer S connexe. Soit \mathcal{D} une décomposition élémentaire finie de S telle que $\Gamma \subset \mathcal{D}[0]$, le poids de S étant constant sur les polytopes $P \in \mathcal{D}[1]$, et considérons l'ensemble $\widetilde{\mathcal{D}[1]}$ des couples (P, ι_P) constitués d'un élément P de $\mathcal{D}[1]$ et d'un générateur ι_P du groupe abélien libre de rang 1 $\Lambda(P)/\mathbb{R}$. Les fibres de la projection $\widetilde{\mathcal{D}[1]} \rightarrow \mathcal{D}[1]$, $(P, \iota_P) \mapsto P$, étant toutes de cardinal 2, $\text{Card}(\widetilde{\mathcal{D}[1]}) = 2 \text{Card}(\mathcal{D}[1])$. La donnée d'un générateur ι_P de $\Lambda(P)/\mathbb{R}$ équivaut au choix d'un point dans ∂P , en l'occurrence $x \in \partial P$ tel que $t_x \equiv \iota_P$ (cf. 1.2.1), d'où une bijection

$$\tau : \widetilde{\mathcal{D}[1]} \xrightarrow{\sim} \coprod_{x \in \mathcal{D}[0]} T_x S.$$

L'espace vectoriel $H(S, \Gamma)$ s'insère dans une suite exacte

$$0 \longrightarrow H(S, \Gamma) \xrightarrow{res} \bigoplus_{P \in \mathcal{D}[1]} \Lambda_{\mathbb{R}}(P) \xrightarrow{\varphi} \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}[0]} V_x \right) \oplus \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}[0] - \Gamma} \mathbb{R} \right)$$

où V_x est l'espace vectoriel quotient de $\mathbb{R}^{T_x S}$ par le plongement diagonal de \mathbb{R} et où l'application linéaire φ traduit la continuité aux points de $\mathcal{D}[0]$ et l'harmonicité en ceux de $\mathcal{D}[0] - \Gamma$. Il en découle les inégalités :

$$\begin{aligned} \dim H(S, \Gamma) &\geq 2\text{Card}(\mathcal{D}[1]) - \left(\sum_{x \in \mathcal{D}[0]} (\text{Card}(T_x S) - 1) + \text{Card}(\mathcal{D}[0] - \Gamma) \right) \\ &\geq \text{Card}(\widetilde{\mathcal{D}[1]}) - \text{Card}\left(\coprod_{x \in \mathcal{D}[0]} T_x S\right) + \text{Card}(\Gamma) \\ &\geq \text{Card}(\Gamma). \end{aligned}$$

□

Remarque 1.2.16. — Une conséquence de cette proposition est la résolubilité locale du problème de Dirichlet sur un polyèdre entier compact S (de dimension un) : tout point $x \in S$ admet un système fondamental de voisinages compacts V tels que l'application

$$H(V, \partial V) \rightarrow \mathbb{R}^{\partial V}$$

soit une bijection.

Étant donnée une partie localement finie Γ dans S , désignons par $M(\Gamma)$ l'espace vectoriel des mesures réelles sur S dont le support est contenu dans Γ .

PROPOSITION 1.2.17. — *Supposant S compact et connexe, la suite d'espaces vectoriels réels*

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow H(S, \Gamma) \xrightarrow{dd^c} M(\Gamma) \xrightarrow{\int_S} \mathbb{R} \longrightarrow 0$$

est exacte.

Démonstration. Puisque S est compact, toute fonction $h \in H(S)$ est localement constante par application du principe du maximum (proposition 1.2.9), d'où l'exactitude en $H(S, \Gamma)$.

Fixons un point $x_0 \in S - \Gamma$; en vertu du lemme suivant, il existe, pour tout point $x \in S$, une unique fonction $h_{x_0, x} \in H(S, \{x_0, x\})$ telle que $h_{x_0, x}(x_0) = 0$ et $dd^c h_{x_0, x} = \delta_x - \delta_{x_0}$. Si $\mu \in M(\Gamma)$ s'écrit $\mu = \sum_{x \in \Gamma} m_x \delta_x$, la fonction $h = \sum_{x \in \Gamma} m_x h_{x_0, x}$ est dans $H(S, \Gamma \cup \{x_0\})$ et, par linéarité,

$$\begin{aligned} dd^c h &= \sum_{x \in \Gamma} m_x (\delta_x - \delta_{x_0}) = \sum_{x \in \Gamma} m_x \delta_x - \left(\sum_{x \in \Gamma} m_x \right) \delta_{x_0} \\ &= \mu - \left(\int_S \mu \right) \delta_{x_0}. \end{aligned}$$

Lorsque μ est de masse nulle, la fonction h est dans $H(S, \Gamma)$ et ceci établit l'exactitude en $M(\Gamma)$. □

LEMME 1.2.18. — *Supposons S compact et connexe et soit $x_0 \in S$; il existe, pour tout point $x \in S$, une unique fonction $h_{x_0, x} \in H(S, \{x_0, x\})$ telle que*

$$\begin{cases} h_{x_0, x}(x_0) = 0 \\ dd^c h_{x_0, x} = \delta_x - \delta_{x_0}. \end{cases}$$

Démonstration. Le noyau de l'application linéaire

$$\lambda_x : H(S, \{x_0, x\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

est le sous-espace $H(S, \{x_0\})$ et λ_x induit un isomorphisme de la droite vectorielle $F = \{h \in H(S, \{x_0, x\}) \mid h(x_0) = 0\}$ sur \mathbb{R} (proposition 1.2.15). Il existe par conséquent une unique fonction $h_{x_0, x} \in H(S, \{x_0, x\})$ s'annulant en x_0 et telle que $\lambda_x(h_{x_0, x}) = 1$. La démonstration s'achève en invoquant le corollaire 1.2.14 : $dd^c h_{x_0, x} = \delta_x - \delta_{x_0}$. \square

1.2.4. Rétractions

Soient S un polyèdre et $S' \subset S$ un domaine polyédral tel que chaque composante connexe C de $\overline{S - S'}$ rencontre S' en un unique point, noté x_C . L'application τ de S dans S' qui coïncide avec l'identité sur S' et envoie une composante connexe C de $\overline{S - S'}$ sur le point x_C de S' est continue – l'image réciproque d'un fermé de S' est fermé dans S – ; c'est en fait un morphisme de polyèdres entiers (considérer une décomposition élémentaire \mathcal{D} de S telle que S' soit une réunion de polytopes appartenant à \mathcal{D} et, pour toute composante connexe C de $\overline{S - S'}$, le point x_C appartienne à $\mathcal{D}[0]$).

Remarque 1.2.19. — Soit i l'injection canonique de S' dans S ; puisque l'application $\tau : S \rightarrow S'$ est continue et vérifie la condition $\tau \circ i = id_{S'}$, S' est un rétracte de S .

PROPOSITION 1.2.20. — Avec les notations en vigueur, l'application $\tau : S \rightarrow S'$ induit, pour toute partie finie Γ de S' , un isomorphisme de $H(S', \Gamma)$ sur $H(S, \Gamma)$.

Démonstration. Soit τ^* l'application \mathbb{R} -linéaire de $C^0(S', \mathbb{R})$ dans $C^0(S, \mathbb{R})$ induite par τ ; étant donnée une fonction harmonique $h \in H(S', \Gamma)$, vérifions que la fonction affine par morceaux $\tau^*(h) = h \circ \tau$ est harmonique sur $S - \Gamma$.

Soit F le fermé $S' \cap \overline{S - S'}$; la fonction τ^*h étant localement constante sur $S - S'$ (corollaire 1.2.11) et harmonique sur $S' - (F \cup \Gamma)$, elle est harmonique sur $S - (F \cup \Gamma)$ et il suffit de vérifier qu'elle est également harmonique en chaque point de $F' = F \cap (S' - \Gamma)$.

Soit $x \in F'$; reprenant la notation introduite au début de ce paragraphe, il existe une composante connexe C de $\overline{S - S'}$ telle que $x = x_C$. Considérons un voisinage V de x dans S de la forme $P_1 \cup \dots \cup P_n$, les P_i étant des sous-polytopes de dimension 1 de S dont x est une face et tels que $P_i \cap P_j = \{x\}$ si $i \neq j$; l'ensemble $T_x S$ s'identifie canoniquement à $\{1, \dots, n\}$. Étant donné $t \in T_x S$,

- $\lambda_{x,t}(\tau^*h) = 0$ si la composante connexe de $V - \{x\}$ correspondante rencontre C , la fonction τ^*h étant constante sur C ;
- $\lambda_{x,t}(\tau^*h) = \lambda_{x,t}(h)$ si la composante connexe de $V - \{x\}$ correspondante est contenue dans S' ;

il en découle la formule

$$\sum_{t \in T_x S} w_x(t) \lambda_{x,t}(\tau^*h) = \sum_{t \in T_x S'} w_x(t) \lambda_{x,t}(h) = 0,$$

et la fonction τ^*h est bien harmonique en x .

Nous venons de vérifier que l'application linéaire $\tau^* : C^0(S', \mathbb{R}) \rightarrow C^0(S, \mathbb{R})$ envoie le sous-espace $H(S', \Gamma)$ dans le sous-espace $H(S, \Gamma)$; l'application induite est un isomorphisme en

vertu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 & H(S, \Gamma) & \\
 & \uparrow & \searrow \\
 \tau^* & & \mathbb{R}^\Gamma \\
 & \uparrow & \nearrow \\
 & H(S', \Gamma) &
 \end{array}$$

dans lequel les deux autres flèches sont des isomorphismes (proposition 1.2.15). \square

1.2.5. Distributions

Soit S un polyèdre entier compact et purement de dimension un ; le poids est supposé constant, identiquement égal à 1. Nous avons introduit l'espace vectoriel $A^0(S)$ des fonctions continues et affines par morceaux sur S , l'espace vectoriel $A^1(S)$ des mesures dont le support est fini et un opérateur linéaire $dd^c : A^0(S) \rightarrow A^1(S)$. Notons respectivement $D^0(S)$ et $D^1(S)$ les espaces vectoriels réels duaux de $A^1(S)$ et $A^0(S)$; puisque $A^1(S)$ n'est autre que l'espace vectoriel engendré par l'ensemble S , son dual $D^0(S)$ s'identifie canoniquement à l'espace des fonctions réelles sur S .

L'accouplement parfait

$$A^0(S) \times A^1(S) \rightarrow \mathbb{R}$$

défini par l'intégration permet d'identifier canoniquement $A^0(S)$ et $A^1(S)$ à des sous-espaces de $D^0(S)$ et $D^1(S)$ respectivement. L'opérateur ${}^tdd^c : D^0(S) \rightarrow D^1(S)$, transposé de dd^c , coïncide avec dd^c sur le sous-espace $A^0(S)$ de $D^0(S)$ en vertu de la proposition 1.2.13 ; cela permet d'écrire dd^c au lieu de ${}^tdd^c$ et nous obtenons donc un prolongement – au sens des distributions – de l'opérateur dd^c à tout l'espace des fonctions réelles sur S .

Dans l'article [32], S.-W. Zhang considère le sous-espace vectoriel $F(S)$ suivant de $D^0(S)$: une fonction réelle f sur S appartient à $F(S)$ si elle est continue et s'il existe une décomposition élémentaire \mathcal{D} de S telle que $f|_P \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ pour tout polytope entier P de dimension 1 figurant dans \mathcal{D} ; évidemment, l'espace $A^0(S)$ est contenu dans $F(S)$. Soient f une fonction dans $F(S)$ et \mathcal{D} une décomposition élémentaire de S adaptée à f ; f définit canoniquement deux mesures $\mu_c(f)$ et $\mu_d(f)$ sur S :

- $\mu_c(f)$ est la mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $d\lambda$ sur S (normalisée de sorte que la masse d'un sous-polytope P de S soit égale à sa longueur) dont la densité est l'élément de $L^1(S, d\lambda)$ représentée sur $S - \mathcal{D}[0]$ par la dérivée seconde f'' de la fonction de classe C^∞ $f|_{S - \mathcal{D}[0]}$;
- $\mu_d(f)$ est la mesure atomique $\sum_{x \in \mathcal{D}[0]} c(x)\delta_x$, où, pour tout $x \in \mathcal{D}[0]$, le coefficient $c(x)$ est la somme des $(f|_P)'(x) = \lambda_{P,x}(f)$, P parcourant l'ensemble des polytopes entiers de dimension 1 figurant dans $\mathcal{D}[1]$ et contenant x .

Ces deux mesures ne dépendent pas du choix de la décomposition élémentaire adaptée \mathcal{D} de S que l'on a choisie. Les applications

$$\mu_c, \mu_d : F(S) \rightarrow F(S)^\vee \rightarrow A^0(S)^\vee = D^1(S),$$

associant à f les mesures $\mu_c(f)$ et $\mu_d(f)$ respectivement, sont linéaires et Zhang introduit alors l'application linéaire

$$\Delta = -(\mu_c + \mu_d)$$

de $F(S)$ dans $F(S)^\vee$; la valeur de Δf sur un élément g de $F(S)$ est notée $\langle \Delta f, g \rangle$.

PROPOSITION 1.2.21. — *La restriction de l'opérateur dd^c au sous-espace $F(S)$ de $D^0(S)$ coïncide avec la composition de l'application linéaire $-\Delta : F(S) \rightarrow F(S)^\vee$ par l'application canonique $F(S)^\vee \rightarrow D^1(S)$.*

Démonstration. Soient $f \in F(S)$ et $\varphi \in A^0(S)$; il nous faut établir l'égalité

$$\int_S f \, dd^c \varphi = -\langle \Delta f, \varphi \rangle.$$

Soit \mathcal{D} une décomposition élémentaire de S adaptée aux fonctions f et φ ; les identités

$$\int_S f \, dd^c \varphi = \sum_{P \in \mathcal{D}[1]} \int_P f|_P \, dd^c \varphi|_P$$

et

$$\langle \Delta f, \varphi \rangle = \sum_{P \in \mathcal{D}[1]} \langle \Delta f|_P, \varphi|_P \rangle,$$

qui découlent directement des définitions des opérateurs dd^c et Δ , ramènent la vérification au cas d'un polyèdre entier P de dimension 1. La conclusion résulte alors de la formule d'intégration par parties suivante sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\int_a^b \varphi(t) f''(t) dt - (\varphi(b) f'(b) - \varphi(a) f'(a)) = - \int_a^b \varphi'(t) f'(t) dt = \varphi'(a) (f(a) - f(b))$$

pour toute fonction $f \in C^\infty([a, b], \mathbb{R})$ et toute fonction affine φ sur $[a, b]$. Le premier membre est égal à $-\langle \Delta f, \varphi \rangle$, le troisième à $\int_{[a, b]} f \, dd^c \varphi$. \square

2. FONCTIONS HARMONIQUES SUR UNE COURBE STRICTEMENT k -ANALYTIQUE LISSE

Dans tout le texte, la notation \log désigne le *logarithme néperien* (ou *naturel*).

Dans ce chapitre, k est un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $|\cdot|$, supposée non triviale. Les éléments de k dont la valeur absolue est inférieure à 1 forment un sous-anneau k° dont le spectre formel $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ est noté S . Le corps résiduel de k , quotient de k° par l'idéal maximal $k^{\circ\circ} = \{a \in k^\circ ; |a| < 1\}$, est noté \tilde{k} .

Après quelques résultats préliminaires sur les espaces k -analytiques, nous allons introduire, pour toute courbe k -analytique lisse X , un faisceau d'espaces vectoriels réels \mathcal{H}_X sur l'espace topologique $|X|$ sous-jacent à X . Par sa définition même, \mathcal{H}_X sera un sous-faisceau du faisceau \mathcal{C}_X des germes de fonctions réelles continues sur $|X|$, appelé *faisceau des germes de fonctions harmoniques* sur X .

La construction du faisceau \mathcal{H}_X procède d'un raisonnement en quatre étapes.

Nous expliquons tout d'abord comment associer, à toute S -courbe formelle (strictement) semi-stable et génériquement lisse \mathcal{X} , un sous-espace $H(\mathcal{X})$ de l'espace vectoriel réel $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$.

Étant donnée une extension non archimédienne K de k , désignons par \mathbf{C}/K la catégorie ayant pour objets les $\mathrm{Spf}(K^\circ)$ -courbes strictement semi-stables, génériquement lisses et quasi-compact, et dont les morphismes entre \mathcal{X} et \mathcal{X}' sont les isomorphismes de l'espace K -analytique \mathcal{X}_η sur un domaine K -analytique de \mathcal{X}'_η . La correspondance $\mathcal{X} \mapsto H(\mathcal{X})$ définit un sous-foncteur du foncteur

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}/K)^{\mathrm{op}} &\rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}} \\ \mathcal{X} &\mapsto C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

compatible – en un sens à préciser – à l'action du groupe de Galois d'une extension galoisienne finie K'/K .

Invokant le théorème de réduction semi-stable ([9]), nous obtenons, pour toute courbe k -analytique lisse X , un préfaisceau H_X sur le G -site de X dont la valeur sur un domaine k -analytique Y de X , isomorphe à la fibre générique d'une S -courbe (formelle) simplement nodale \mathcal{Y} , est $H(\mathcal{Y})$. Ce préfaisceau est un sous-préfaisceau du faisceau $C^0(\cdot, \mathbb{R})$.

Le préfaisceau H_X sur le G -site d'une courbe k -analytique lisse X n'est pas un faisceau. Le site défini par l'espace topologique $|X|$ est naturellement un « sous-site » du G -site de X et la construction s'achève en vérifiant que le préfaisceau \mathcal{H}_X sur $|X|$ induit par H_X est un faisceau.

2.1. Résultats préliminaires

Nous commençons par rassembler divers résultats de géométrie analytique non archimédienne dont nous aurons besoin et en profitons pour introduire un certain nombre de notations. Rappelons que, pour tout espace localement annelé $X = (|X|, \mathcal{O}_X)$ et tout point x de $|X|$, le corps résiduel de l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ se note $\kappa(x)$.

2.1.1. Schémas formels et espaces analytiques.

Nous renvoyons au livre [3] et à l'article [4] pour les fondements de la géométrie analytique sur un corps non archimédien.

Rappelons tout d'abord que, pour tous réels strictement positifs r_1, \dots, r_n ,

$$k\{r_1^{-1}T_1, \dots, r_n^{-1}T_n\}$$

est la k -algèbre de Banach des séries formelles

$$f = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu(f) \mathbf{T}^\nu = \sum_{\nu \in \mathbb{N}^n} a_\nu T_1^{\nu_1} \dots T_n^{\nu_n}$$

telles que $|a_\nu(f)| \mathbf{r}^\nu = |a_\nu| r_1^{\nu_1} \dots r_n^{\nu_n}$ tende vers 0 lorsque $|\nu| = \nu_1 + \dots + \nu_n$ tend vers $+\infty$, munie de la norme

$$\|f\| = \max_{\nu} |a_\nu| \mathbf{r}^\nu.$$

Semi-norme spectrale.

Soit \mathcal{A} une k° -algèbre topologiquement de présentation finie et plate, de spectre formel $\mathcal{X} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$. Le sous- k° -module \mathcal{A} de $A = \mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k$ munit A d'une structure de k -algèbre de Banach via la norme

$$|a|_{\mathcal{A}} = \inf\{|\lambda| ; a \in \lambda \mathcal{A}\}.$$

La *fibres générique* de \mathcal{X} est l'espace strictement k -affinoïde $\mathcal{M}(A)$, noté \mathcal{X}_η ; on rappelle qu'il s'agit de l'ensemble des semi-normes multiplicatives et bornées sur la k -algèbre de Banach A qui induise la valeur absolue $|\cdot|$ sur k , muni de la topologie la moins fine rendant continues les évaluations $x \mapsto |a(x)| = x(a)$, $a \in A$. Le noyau \mathfrak{p}_x d'une semi-norme multiplicative $x : A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ est un idéal premier de A et l'on note $\mathcal{H}(x)$ la complétion du corps des fractions de l'anneau intègre A/\mathfrak{p}_x pour la valeur absolue induite par x . Ce corps est le *corps résiduel complété* du point x de X .

PROPOSITION 2.1.1. — *La semi-norme spectrale sur A coïncide avec la norme $|\cdot|_{\mathcal{A}}$ associée au sous- k° -module \mathcal{A} si et seulement si la \tilde{k} -algèbre $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$ est réduite.*

Démonstration. La semi-norme spectrale $|\cdot|_{\mathrm{sp}}$ sur A s'obtient par la formule limite usuelle à partir de toute norme $\|\cdot\|$ définissant la structure de k -algèbre de Banach de A :

$$|a|_{\mathrm{sp}} = \lim_n \|a^n\|^{1/n},$$

et elle coïncide avec $\|\cdot\|$ si et seulement si cette norme est *pré-multiplicative*, c'est-à-dire vérifie $\|a^n\| = \|a\|^n$ pour tous $a \in A$, $n \in \mathbb{N}$. Appliquant ceci à la norme $|\cdot|_{\mathcal{A}}$ associée au sous- k° -module \mathcal{A} de A , il suffit de vérifier que cette norme est pré-multiplicative si et seulement si la \tilde{k} -algèbre $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$ est réduite. Puisque la norme $|\cdot|_{\mathcal{A}}$ est à valeurs dans $|k|$ ([8], 6.1.1, prop.2), sa pré-multiplicativité équivaut à la condition $1 \leq |x^n|_{\mathcal{A}}$ pour tout $x \in \mathcal{A}$ tel que $|x|_{\mathcal{A}} = 1$. La vérification est immédiate : il existe $x \in \mathcal{A}$ et $n > 1$ tels que $|x|_{\mathcal{A}} = 1$ et $|x^n|_{\mathcal{A}} < 1$ si et seulement s'il existe $\tilde{x} \in \mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$ et $n > 1$ tels que $\tilde{x} \neq 0$, $\tilde{x}^n = 0$. La norme $|\cdot|_{\mathcal{A}}$ est ainsi pré-multiplicative si et seulement si la \tilde{k} -algèbre $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$ est réduite. \square

La boule unité de A pour la norme spectrale se note A° et l'on introduit également l'idéal $A^{\circ\circ} = \{a \in A ; |a|_{\mathrm{sp}} < 1\}$; le quotient $\tilde{A} = A^\circ/A^{\circ\circ}$ est une \tilde{k} -algèbre *de type fini* et réduite (cette dernière propriété provient de la pré-multiplicativité de la norme spectrale). La k° -algèbre A° n'est en général pas topologiquement de présentation finie sur k° ; c'est toutefois le cas lorsque la k -algèbre A est *réduite* et que l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- la valuation de k est discrète (Tate);

- le corps k est de caractéristique nulle ;
- il existe une sous- k° -algèbre topologiquement de présentation finie $\mathcal{A} \subset A$ telle que $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} k = A$ et que la \tilde{k} -algèbre $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k}$ soit réduite.

Dans tous les cas, la k° -algèbre A° est la *fermeture intégrale* de \mathcal{A} ([8], 6.1.2 et 6.4.3) dans A . Le morphisme dominant canonique

$$\pi_{\mathcal{X}} : \tilde{\mathcal{X}} = \text{Spec}(\tilde{A}) \rightarrow \mathcal{X}_s$$

est par conséquent *entier* ; les deux \tilde{k} -schémas étant de *de type fini*, c'est un morphisme *fini*.

Réductions et ensemble $S_0(\mathcal{X})$.

On dispose de deux applications de réduction naturelles :

- la première, $\tilde{r} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$, envoie une semi-norme $x : A \rightarrow \mathcal{H}(x)$ sur la localité du $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ -point induit $\tilde{A} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$,
- la seconde, $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$, envoie une semi-norme $x : A \rightarrow \mathcal{H}(x)$ sur la localité du $\widetilde{\mathcal{H}(x)}$ -point induit $\mathcal{A} \otimes_{k^\circ} \tilde{k} \rightarrow \widetilde{\mathcal{H}(x)}$.

Ces applications sont *anti-continues* (l'image réciproque d'un ouvert est un fermé) et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{\mathcal{X}} \\ & \nearrow \tilde{r} & \downarrow \pi_{\mathcal{X}} \\ \mathcal{X}_\eta & & \mathcal{X}_s \\ & \searrow r & \end{array}$$

est évidemment commutatif.

Le *bord de Shilov* de $X = \mathcal{M}(A)$ est le plus petit fermé $\Gamma(X) \subset X$ tel que chaque fonction $|a|$, $a \in A$, atteigne son maximum en un point de $\Gamma(X)$.

PROPOSITION 2.1.2

- (i) *L'application \tilde{r} est surjective.*
- (ii) *Le bord de Shilov $\Gamma(X)$ de X est l'image réciproque par l'application \tilde{r} de l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}^{(0)}$ des points génériques de $\tilde{\mathcal{X}}$.*
- (iii) *L'application \tilde{r} réalise une bijection de $\Gamma(X)$ sur $\tilde{\mathcal{X}}^{(0)}$ telle que*

$$\kappa(\tilde{r}(\xi)) = \widetilde{\mathcal{H}(\xi)}$$

pour tout point $\xi \in \Gamma(X)$.

Démonstration. Les points (i) et (ii) sont démontrés à la proposition 2.4.4 de [3]. On y trouve également la preuve de la première assertion du point (iii), ainsi que de la seconde sous l'hypothèse restrictive $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$, laquelle n'est pas nécessaire.

Remplaçant X par l'image réciproque $\tilde{r}^{-1}(U)$ d'un ouvert affine irréductible U de \tilde{X} de point générique $\tilde{r}(\xi)$, on peut supposer \tilde{X} irréductible et $\Gamma(X) = \{\xi\}$. Le point $\tilde{r}(\xi)$ est par définition la localité du $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}$ -point de \tilde{X} provenant, par réduction, de l'homomorphisme $A \rightarrow \mathcal{H}(\xi)$; on a donc une injection canonique $\kappa(\tilde{r}(\xi)) \hookrightarrow \widetilde{\mathcal{H}(\xi)}$, compatible à la localisation

sur \tilde{X} : pour tout ouvert affine non vide $U \subset \tilde{X}$, le diagramme naturel

$$\begin{array}{ccc} \kappa(\tilde{r}(\xi)) & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{H}(\xi)} \\ & \searrow & \downarrow \tilde{j} \\ & & \widetilde{\mathcal{H}_U(\xi)} \end{array}$$

où $\mathcal{H}_U(\xi)$ désigne le corps résiduel complété du point ξ vu dans le domaine k -affinoïde $\tilde{r}^{-1}(U)$ et l'homomorphisme $j : \mathcal{H}(\xi) \rightarrow \mathcal{H}_U(\xi)$ est induit par l'inclusion $\tilde{r}^{-1}(U) \subset \tilde{X}$. Cet homomorphisme j est un isomorphisme. On peut en effet supposer U de la forme $D(\tilde{f})$, $f \in A^\circ - A^{\circ\circ}$, auquel cas $\tilde{r}^{-1}(U)$ est le domaine k -affinoïde $\mathcal{M}(B)$, avec $B = A\{X\}/(1 - Xf)$; $\mathcal{H}_U(\xi)$ est par définition la complétion du corps des fractions de B^{red} pour la valeur absolue ξ et l'image de $\text{Frac}(A^{\text{red}})$ dans $\text{Frac}(B^{\text{red}})$ est dense pour la topologie associée à celle-ci. L'homomorphisme canonique $A \rightarrow B$ induit donc une isométrie du corps $\mathcal{H}(\xi)$ sur le corps $\mathcal{H}_U(\xi)$.

La conclusion est maintenant évidente. Soit $h \in \widetilde{\mathcal{H}(\xi)}^\times$ et posons $\kappa(\xi) = \text{Frac}(A^{\text{red}})$. L'inclusion d'image dense $\kappa(\xi) \hookrightarrow \mathcal{H}(\xi)$ identifie les corps résiduels $\widetilde{\kappa(\xi)}$ et $\widetilde{\mathcal{H}(\xi)}$, de sorte que l'on peut supposer h de la forme \tilde{f} , avec $f \in \kappa(\xi)^\circ$ et $|f(\xi)| = 1$. Considérons alors un élément non nul g dans A tel que gf appartienne à A ; le groupe $|\mathcal{H}(\xi)^\times|/|k^\times|$ étant fini, le remplacement de g par βg^n , pour un entier $n \geq 1$ et un élément β de k^\times convenablement choisis, permet de supposer $|g(\xi)| = 1$. Il existe un ouvert affine dense $U \subset \tilde{X}$ tel que g soit inversible sur le domaine k -affinoïde $\tilde{r}^{-1}(U)$ et l'élément $\tilde{g}^{-1}gf$ de $\kappa(\tilde{r}(\xi))$ a pour image h dans $\widetilde{\mathcal{H}_U(\xi)} = \widetilde{\mathcal{H}(\xi)}$. \square

Étant donné un S -schéma formel \mathcal{X} localement de présentation finie, les constructions précédentes se recollent canoniquement pour donner naissance à un morphisme fini dominant

$$\pi_{\mathcal{X}} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_s$$

et à des applications de réduction r et \tilde{r} de \mathcal{X}_η sur \mathcal{X}_s et $\tilde{\mathcal{X}}$ respectivement qui s'insèrent dans le même diagramme commutatif que précédemment.

DÉFINITION 2.1.3. — *Pour tout S -schéma formel \mathcal{X} plat et localement de présentation finie, l'image réciproque par l'application $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$ de l'ensemble $\mathcal{X}_s^{(0)}$ des points génériques de \mathcal{X}_s est notée $S_0(\mathcal{X})$.*

Remarque 2.1.4

1. Le morphisme $\pi_{\mathcal{X}} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_s$ étant fini et dominant, le sous-ensemble $S_0(\mathcal{X})$ de \mathcal{X}_η est également l'image réciproque par l'application $\tilde{r} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ de l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}^{(0)}$ des points génériques de $\tilde{\mathcal{X}}$. Vu la proposition 2.1.2, cette application réalise une bijection de $S_0(\mathcal{X})$ sur $\tilde{\mathcal{X}}^{(0)}$ telle que

$$\kappa(\tilde{r}(\xi)) = \widetilde{\mathcal{H}(\xi)}$$

pour tout point $\xi \in S_0(\mathcal{X})$.

2. L'anti-continuité de l'application de réduction $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$ implique qu'elle envoie une partie connexe sur une partie connexe. Compte tenu de la surjectivité de r (proposition 2.1.2), on en déduit en particulier que \mathcal{X}_s est connexe si tel est le cas de \mathcal{X}_η .

DÉFINITION 2.1.5. — *Un S -schéma formel \mathcal{X} , topologiquement de présentation finie et plat, sera dit maximal si l'homomorphisme canonique de faisceaux (en k° -algèbres topologiques) $\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \rightarrow (\mathcal{O}_{\mathcal{X}} \otimes_{k^\circ} k)^\circ$ est un isomorphisme.*

Les propriétés suivantes sont immédiates pour tout S -schéma formel maximal \mathcal{X} :

- le morphisme $\pi_{\mathcal{X}} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_s^{\text{réd}}$ est un isomorphisme ;
- \mathcal{X} est uniquement déterminé par la donnée de l'espace strictement k -analytique \mathcal{X}_η , de l'espace topologique sous-jacent à sa fibre spéciale \mathcal{X}_s et de l'application de réduction $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$.

Un S -schéma formel topologiquement de présentation finie et plat est maximal si et seulement s'il est intégralement fermé dans sa fibre générique.

Le groupe $\Lambda(\mathcal{X})$.

Étant donné un S -schéma formel plat \mathcal{X} , désignons par $\Lambda_k(\mathcal{X})$ le sous-groupe du groupe abélien $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ image de l'homomorphisme canonique

$$(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_{k^\circ} k)^\times \rightarrow C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}), \quad f \mapsto \log |f|.$$

L'homomorphisme $f^* : C^0(|\mathcal{Y}_\eta|, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ défini par un morphisme de S -schémas formels $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ induit un homomorphisme $\Lambda_k(f)$ de $\Lambda_k(\mathcal{Y})$ dans $\Lambda_k(\mathcal{X})$.

Nous désignerons par $\Lambda(\mathcal{X})$ le sous-groupe de l'espace $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $|\mathcal{X}_\eta|$ engendré par \mathbb{R} et $\Lambda_k(\mathcal{X})$.

LEMME 2.1.6. — *Pour tout S -schéma formel plat et localement de présentation finie \mathcal{X} , l'application de restriction*

$$\Lambda(\mathcal{X}) \subset C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}), \mathbb{R})$$

est injective et l'homomorphisme

$$\Lambda(\mathcal{X})/\mathbb{R} \rightarrow \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}), \mathbb{R})/\mathbb{R}$$

obtenu en tuant les fonctions constantes est à valeurs dans l'image du sous-groupe

$$\{b \in \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}), \mathbb{R}) ; b(x) \in \log |\mathcal{H}(x)|^\times \text{ pour tout } x\}.$$

Démonstration. Soient \mathcal{U} un recouvrement de \mathcal{X}_s par des ouverts affines et \mathcal{X}' le S -schéma formel somme des \mathcal{X}_U ; en vertu du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}), \mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda(\mathcal{X}') & \longrightarrow & \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}'), \mathbb{R}) \end{array}$$

dans lequel les deux flèches verticales sont injectives, il est loisible de supposer \mathcal{X} affine.

Lorsque \mathcal{X} est affine, $X = \mathcal{X}_\eta$ est un espace strictement k -affinoïde dont $S_0(\mathcal{X})$ est le bord de Shilov ; puisque toute section $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ atteint son maximum en un point de $\Gamma(X) = S_0(\mathcal{X})$, une section $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$ identiquement égale à 1 sur $\Gamma(X)$ est de module constant sur X et l'application de restriction $C^0(|X|, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}), \mathbb{R})$ est injective sur l'image de l'homomorphisme $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times \rightarrow C^0(|X|, \mathbb{R}), \quad f \mapsto \log |f|.$

La seconde assertion est triviale. □

Les sites X_G et X_R .

La définition des espaces k -analytiques présentée dans [3] et étendue dans [4] est telle que la notion de *domaine affinoïde* dans un espace k -analytique soit bien définie (exactement comme la notion de *sous-polytope* d'un polyèdre).

De manière générale, une partie Y d'un espace k -analytique X est un *domaine k -analytique* si elle admet un recouvrement localement fini par des domaines k -affinoïdes. Le G -site de X

est la catégorie X_G dont les objets sont les domaines k -analytiques de X et les morphismes les inclusions, munie de la topologie de Grothendieck pour laquelle les familles couvrantes sont les recouvrement pouvant être raffinés en un recouvrement localement fini par des domaines k -affinoïdes. La correspondance

$$V \mapsto A_V,$$

où V est un domaine k -affinoïde de X et A_V est l'algèbre de V , se prolonge en un *faisceau* \mathcal{O}_X sur le G -site X_G de X , le *faisceau structural* de X .

Notons $|X|$ l'espace topologique sous-jacent à X ainsi que le site canoniquement associé ; tout point de X admettant un système fondamental de voisinages formé par des domaines k -analytiques compacts, tout ouvert de $|X|$ est la réunion d'une famille localement finie de domaines k -affinoïdes et détermine donc un objet de X_G . On définit ainsi une flèche

$$\pi_X : X_G \rightarrow |X| ;$$

c'est un morphisme de sites.

Un domaine *strictement k -analytique* est une partie de X admettant un recouvrement localement fini par des domaines strictement k -affinoïdes. Lorsque X est un espace *strictement k -affinoïde* (au sens de [4], c'est-à-dire tel que tout point admette un système fondamental de voisinages formé de domaines strictement k -analytiques compacts), nous appellerons *site rigide* de X et noterons X_R , la sous-catégorie pleine de X_G dont les objets sont les domaines strictement k -analytiques, munie de la topologie de Grothendieck induite.

Remarque 2.1.7. — Le préfaisceau

$$Y \leadsto C^0(|Y|, \mathbb{R})$$

sur le site X_G est un faisceau : en effet, une fonction φ sur un espace topologique X est continue s'il existe un recouvrement localement fini de X par des fermés F tels que $\varphi|_F$ soit continue.

CONVENTION. Étant donné un espace k -analytique X , un *ouvert* (resp. *fermé*) de X sera toujours une partie ouverte (resp. fermée) de l'espace topologique $|X|$ sous-jacent à X .

Morphismes finis et plats.

Soient $p : Y \rightarrow X$ un morphisme fini et plat d'espaces k -analytiques et x un point de X . L'anneau semi-local $\mathcal{O}_{Y, p^{-1}(x)}$ est une $\mathcal{O}_{X, x}$ -algèbre libre de rang fini se décomposant canoniquement sous la forme

$$\mathcal{O}_{Y, p^{-1}(x)} = \bigoplus_{y \in p^{-1}(x)} \mathcal{O}_{Y, y}.$$

Pour tout point $y \in p^{-1}(x)$, $\mathcal{O}_{Y, y}$ est une $\mathcal{O}_{X, x}$ -algèbre libre de rang $(\deg_y p)$, munie d'une semi-norme multiplicative $|(y)|$ induite par l'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_{Y, y} \rightarrow \mathcal{H}(y)$; elle prolonge la semi-norme $|(x)|$ sur $\mathcal{O}_{X, x}$ provenant de $\mathcal{O}_{X, x} \rightarrow \mathcal{H}(x)$.

PROPOSITION 2.1.8. — *Pour tout point $y \in p^{-1}(x)$ et tout élément f de $\mathcal{O}_{Y, y}^\times$, la norme $N_{y/x}(f)$ de f est un élément de $\mathcal{O}_{X, x}^\times$ tel que*

$$|N_{y/x}(f)(x)| = |f(y)|^{\deg_y p}.$$

Démonstration. Soit f' l'image de f dans $A = \mathcal{O}_{Y, y} \otimes_{\mathcal{O}_{X, x}} \mathcal{H}(x)$. La multiplication par f (resp. f') est un automorphisme de la $\mathcal{O}_{X, x}$ -algèbre $\mathcal{O}_{Y, y}$ (resp. de la $\mathcal{H}(x)$ -algèbre A), de déterminant $N_{y/x}(f)(x) \in \mathcal{O}_{X, x}^\times$ (resp. $N(f') \in \mathcal{H}(x)^\times$) et :

$$|N_{y/x}(f)(x)| = |N(f')|$$

car $N(f')$ est l'image de $N_{y/x}(f)$ dans $\mathcal{H}(x)$; c'est également, au signe près, le terme constant du polynôme caractéristique χ de f' .

Soit P le polynôme minimal unitaire de $f(y) \in \mathcal{H}(y)$ sur $\mathcal{H}(x)$; le terme constant a_0 de P étant, au signe près, la norme de $f(y)$,

$$|a_0| = |f(y)|^{\deg(P)}.$$

L'image $P(f(y))$ de $P(f')$ dans $A^{\text{red}} = \mathcal{H}(y)$ étant nulle, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $P(f')^n = 0$. Puisque le polynôme P est irréductible, on en déduit que le polynôme minimal unitaire de l'automorphisme f' est une puissance de P , puis qu'il est de même de son polynôme caractéristique χ :

$$\chi^{\deg(P)} = P^{\deg(\chi)} = P^{\deg_y p}.$$

Nous concluons en comparant les valeurs absolues des termes constants :

$$|N_{y/x}(f)(x)|^{\deg P} = |a_0|^{\deg_y p} = |f(y)|^{(\deg(P))(\deg_y p)},$$

soit

$$|N_{y/x}(f)(x)| = |f(y)|^{\deg_y p}.$$

□

Soit N_p l'homomorphisme de norme $p_* \mathcal{O}_Y^\times \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$.

COROLLAIRE 2.1.9. — *Pour tout point $x \in X$ et tout élément f de $\mathcal{O}_{Y,p^{-1}(x)}^\times$,*

$$\log |N_p(f)(x)| = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\deg_y p) \log |f(y)|.$$

2.1.2. Bords

Berkovich a défini une notion de *bord* pour tout espace k -analytique X ; c'est une partie fermée de X , notée ∂X ([3], 2.5). Lorsqu'il s'agit de la fibre générique \mathcal{X}_η d'un S -schéma formel localement de présentation finie et plat \mathcal{X} , $\partial \mathcal{X}_\eta$ est caractérisé par la propriété suivante :

$\mathcal{X}_\eta - \partial \mathcal{X}_\eta$ est l'image réciproque par r des \tilde{k} -schémas *propres* contenus dans \mathcal{X}_s .

En particulier, lorsque \mathcal{X} est affine, $\mathcal{X}_\eta - \partial \mathcal{X}_\eta$ est l'image réciproque de l'ensemble des points fermés de \mathcal{X}_s .

L'ouvert complémentaire $X - \partial X$ est l'*intérieur* de X .

Lorsque \mathcal{X} est un S -schéma formel localement de présentation finie et plat tel que le \tilde{k} -schéma localement algébrique \mathcal{X}_s soit purement de dimension 1, il est évident que le bord de \mathcal{X}_η coïncide avec le sous-ensemble de $S_0(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_\eta$ formé des points correspondants aux composantes irréductibles affines de $\tilde{\mathcal{X}}$. On a en fait l'égalité $\Gamma(X) = \partial X$ pour tout espace k -affinoïde X purement de dimension 1 compte tenu des deux faits suivants :

- pour toute extension non archimédienne K/k et tout espace k -affinoïde X , $\Gamma(X)$ (resp. ∂X) est l'image de $\Gamma(X \hat{\otimes}_k K)$ (resp. $\partial(X \hat{\otimes}_k K)$) par l'application canonique de $X \otimes_k K$ dans X ([3], 2.4.5 et [3] 2.5.12);
- pour toute extension non archimédienne K/k et tout espace k -affinoïde X , $\dim(X) = \dim(X \otimes_k K)$.

Précisons, dans un cas particulier que l'on rencontrera fréquemment, la relation entre cette notion de bord et celle de frontière considérée en topologie générale.

PROPOSITION 2.1.10. — *Soient X un espace k -analytique connexe sans bord et $V \subset X$ un domaine k -affinoïde. Il y a identité entre :*

- le bord ∂V de V ;

- la frontière du fermé V de X ;
- la frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} - \Omega$ de l'ouvert $\Omega = X - V$ de X .

Démonstration. Dans tout espace topologique, la frontière d'un fermé coïncide avec celle de l'ouvert complémentaire ; il suffit donc de prouver que ∂V s'identifie à la frontière du fermé V de X , ou encore que $V - \partial V$ coïncide avec l'intérieur topologique de ce fermé. Puisque, par définition, $V - \partial V = \text{Int}(V)$, la conclusion résulte des points (i) et (iii) de la proposition 3.1.3 de [3]. \square

2.1.3. Courbes strictement k -analytiques.

Convention. Précisons la terminologie que nous emploierons :

- une S -courbe est un S -schéma formel localement de présentation finie, séparé, plat et purement de dimension 1 ;
- une courbe strictement k -analytique est un espace strictement k -analytique au sens du chapitre 3 de [3], paracompact, purement de dimension 1 et *sans bord*.

Remarque 2.1.11. — Quelques mots de commentaire s'imposent quant à la définition adoptée de la notion de courbe analytique.

1. Les espaces k -analytiques analytifiés de courbes localement algébriques sur k (séparées) sont des courbes strictement k -analytiques au sens précédent.
2. Du point de vue adopté par Berkovich dans [4], nous considérons les espaces strictement k -analytiques paracompacts qui sont purement de dimension 1, sans bord et tels que tout point admette un voisinage k -affinoïde. Ceci exclut, par exemple, la fibre générique X du S -schéma formel \mathcal{X} , plat et purement de dimension 1, obtenu en recollant deux copies de $\mathbb{A}_S^1 = \text{Spf}(k^\circ\{T_1\})$ le long de l'ouvert $\text{Spf}(k^\circ\{T_1, T_1^{-1}\})$ (via les immersions canoniques). En effet, l'espace strictement k -analytique X (au sens de [4]) est le recollement de deux copies du disque unité fermé $E(0, 1) = \mathcal{M}(k\{T_1\})$ le long du domaine k -affinoïde $\{|T_1| = 1\}$, via les immersions canoniques, et le point η de X correspondant au point de Shilov de $E(0, 1)$ ne possède pas de voisinage k -affinoïde dans X : il existerait sinon un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que \mathcal{Y} soit un S -schéma séparé, ce qui est absurde puisque le morphisme q est séparé tandis que le morphisme structural $\mathcal{X} \rightarrow S$ ne l'est pas.
3. Un espace k -affinoïde Y purement de dimension 1 est muni d'un faisceau structural en k -algèbres \mathcal{O}_Y tel que, pour tout ouvert $U \subset Y$

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_Y) = \varprojlim_V A_V,$$

V parcourant l'ensemble des domaines k -affinoïdes contenus dans U et A_V désignant l'algèbre de V . Compte tenu du fait que les homomorphismes d'algèbres strictement k -affinoïdes sont automatiquement continus ([8], 6.1.3), nous pouvons reformuler comme suit la définition des courbes strictement k -analytiques que nous avons adoptée :

une courbe strictement k -analytique X est la donnée d'un espace topologique paracompact $|X|$ et d'un faisceau en k -algèbres \mathcal{O}_X sur $|X|$ tels que l'espace annelé $(|X|, \mathcal{O}_X)$ soit localement isomorphe à $(Y - \partial Y, \mathcal{O}_Y)$, Y étant un espace strictement k -affinoïde purement de dimension 1.

Une courbe strictement k -analytique est un particulier un espace localement k -annelé et, toujours en vertu de la continuité des k -homomorphismes d'algèbres strictement k -affinoïdes, les morphismes de courbes strictement k -analytiques sont les morphismes d'espaces localement k -annelés.

4. Tout point d'une courbe strictement k -analytique admet un système fondamental de voisinages compacts de la forme \mathcal{X}_η , \mathcal{X} étant une S -courbe quasi-compacte.

La proposition 2.1.10 se spécialise ainsi lorsque l'espace analytique considéré est une courbe.

PROPOSITION 2.1.12. — *Soit X une courbe strictement k -analytique ; quel que soit le domaine k -affinoïde $V \subset X$, il y a identité entre*

- la frontière du fermé V de X ,
- le bord ∂V de V ,
- le bord de Shilov $\Gamma(V)$ de V .

Remarquons explicitement que, dans ce cas, $\partial V = \Gamma(V)$ est toujours un sous-ensemble fini de X .

Modèles et réductions.

LEMME 2.1.13. — *Soit \mathcal{X} une S -courbe. L'application de réduction*

$$\tilde{r} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$$

(définie en 2.1.1) réalise une bijection de $\pi_0(\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X}))$ sur l'ensemble $\tilde{\mathcal{X}}^{(1)}$ des points fermés de la \tilde{k} -courbe $\tilde{\mathcal{X}}$.

Démonstration. Chaque composante connexe c de $\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$ est la réunion d'une famille croissante de domaines strictement k -analytiques compacts et connexes. Étant donné un tel domaine $Y \subset c$, on déduit du théorème 2 de [25] l'existence d'un S -schéma formel admissible quasi-compact \mathcal{Y} et d'un S -morphisme $j : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tels que $\mathcal{Y}_\eta = Y$ et j_η soit l'immersion de Y dans \mathcal{X}_η . Le \tilde{k} -morphisme $\tilde{j} : \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}$ est de type fini ; son image Z est donc une partie localement constructible de $\tilde{\mathcal{X}}$ en vertu du théorème de Chevalley ([EGA], Chap. IV, Théorème 1.8.4). L'identité $Z = \tilde{r}(Y)$, Z est d'autre part connexe (l'application \tilde{r} est anti-continue) et disjointe des points génériques de $\tilde{\mathcal{X}}$; ce dernier schéma étant de dimension 1, nous en déduisons finalement que Z est un point fermé de $\tilde{\mathcal{X}}$, puis que l'application de réduction \tilde{r} envoie toute la composante c sur ce point. Ceci établit que \tilde{r} induit une application de $\pi_0(\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X}))$ sur $\tilde{\mathcal{X}}^{(1)}$ (\tilde{r} est surjective).

Il reste à vérifier que l'image réciproque d'un point fermé est connexe, ce qui est démontré par Bosch dans l'article [7] (Theorem 5.9). \square

Remarque 2.1.14. — Le théorème de Bosch auquel on vient de faire référence fournit plus précisément le fait suivant : étant donnés un S -schéma formel \mathcal{X} , localement de présentation finie et plat, ainsi qu'un point fermé \tilde{x} de $\tilde{\mathcal{X}}$, la k° -algèbre topologique

$$\Gamma(\tilde{r}^{-1}(\tilde{x}), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta})^\circ$$

des sections bornées par 1 du faisceau structural $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}$ de \mathcal{X}_η sur l'ouvert $\tilde{r}^{-1}(\tilde{x})$ – qui s'identifie à la limite projective des k° -algèbres A_Y° , Y parcourant l'ensemble filtrant des domaines strictement k -affinoïdes Y de \mathcal{X}_η contenus dans $\tilde{r}^{-1}(\tilde{x})$ – est isomorphe à la complétion $\mathfrak{m}_{\tilde{x}}$ -adique du germe au point \tilde{x} du faisceau de k° -algèbres $\tilde{r}_* \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}^\circ$ sur $\tilde{\mathcal{X}}$.

Puisqu'il s'agit d'un anneau local, l'ouvert $\tilde{r}^{-1}(\tilde{x})$ est connexe.

Un morphisme $f : Y \rightarrow X$ d'espaces k -analytiques (resp. de schémas) est *quasi-fini* s'il est localement de type fini et à fibres discrètes.

PROPOSITION 2.1.15. — *Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux S -courbes maximales (définition 2.1.5) et $f : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta$ un morphisme quasi-fini.*

(i) Le morphisme f se prolonge, d'une manière et d'une seule, en un S -morphisme $\underline{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ si et seulement si

$$f^{-1}(S_0(\mathcal{Y})) \subset S_0(\mathcal{X}).$$

(ii) Le morphisme f se prolonge, d'une manière et d'une seule, en un S -morphisme quasi-fini $\underline{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ si et seulement si

$$f^{-1}(S_0(\mathcal{Y})) = S_0(\mathcal{X}).$$

Démonstration. Rappelons que, les courbes \mathcal{X} et \mathcal{Y} étant par hypothèse *maximales* (définition 2.1.5),

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = (\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_{k^\circ} k)^\circ = \Gamma(U_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta})^\circ,$$

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = (\Gamma(V_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \otimes_{k^\circ} k)^\circ = \Gamma(V_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\eta})^\circ$$

pour tous ouverts affines $U \subset \mathcal{X}$, $V \subset \mathcal{Y}$ et que les morphismes canoniques

$$\pi_{\mathcal{X}} : \tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \mathcal{X}_s^{\text{réd}},$$

$$\pi_{\mathcal{Y}} : \tilde{\mathcal{Y}} \rightarrow \mathcal{Y}_s^{\text{réd}}$$

sont des isomorphismes.

Un prolongement \underline{f} de f , s'il en existe, est nécessairement unique : quels que soient en effet les ouverts affines $U \subset \mathcal{X}$ et $V \subset \mathcal{Y}$ tels que $f(U_\eta) \subset V_\eta$, $\underline{f}_V^\#$ est l'homomorphisme de $\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = \Gamma(V_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\eta})^\circ$ dans $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(U_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta})^\circ$ induit par l'homomorphisme

$$f_{V_\eta}^\# : \Gamma(V_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\eta}) \rightarrow \Gamma(U_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}).$$

(i) L'existence d'un prolongement $\underline{f} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ de f fournit un diagramme commutatif (ensembliste)

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{r_{\mathcal{X}}} & \mathcal{X}_s \\ f \downarrow & & \downarrow \underline{f}_s \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{r_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y}_s \end{array}$$

duquel on déduit l'inclusion

$$f^{-1}(S_0(\mathcal{Y})) = (f \circ r_{\mathcal{Y}})^{-1}(\mathcal{Y}_s^{(0)}) = r_{\mathcal{X}}^{-1}(\underline{f}_s^{-1}(\mathcal{Y}_s^{(0)})) \subset r_{\mathcal{X}}^{-1}(\mathcal{X}_s^{(0)}) = S_0(\mathcal{X})$$

puisque \underline{f}_s envoie un point fermé de \mathcal{X}_s sur un point fermé de \mathcal{Y}_s .

Supposons réciproquement que la condition $f^{-1}(S_0(\mathcal{Y})) \subset S_0(\mathcal{X})$ soit vérifiée et construisons le prolongement \underline{f} de f .

Première étape. En vertu du lemme 2.1.13, les applications de réduction $r_{\mathcal{X}}$ et $r_{\mathcal{Y}}$ réalisent des bijections des ensembles $\pi_0(\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X}))$ et $\pi_0(\mathcal{Y}_\eta - S_0(\mathcal{Y}))$ sur $\mathcal{X}_s^{(1)}$ et $\mathcal{Y}_s^{(1)}$ respectivement. Sous l'hypothèse précédente, f détermine une application continue de $\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$ dans $\mathcal{Y}_\eta - S_0(\mathcal{Y})$ et induit donc une application de $\pi_0(\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X}))$ dans $\pi_0(\mathcal{Y}_\eta - S_0(\mathcal{Y}))$. Ceci conduit à introduire l'application \underline{f}_s de \mathcal{X}_s dans \mathcal{Y}_s définie comme suit :

– sur l'ensemble $\mathcal{X}_s^{(1)}$ des points fermés \mathcal{X}_s , \underline{f}_s est déterminée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})) & \xrightarrow{r_{\mathcal{X}}} & \mathcal{X}_s^{(1)} \\ f \downarrow & & \downarrow \underline{f}_s \\ \pi_0(\mathcal{Y}_\eta - S_0(\mathcal{Y})) & \xrightarrow{r_{\mathcal{Y}}} & \mathcal{Y}_s^{(1)}; \end{array}$$

- elle est prolongée en envoyant un point générique $r_{\mathcal{X}}(\xi)$ de \mathcal{X}_s , $\xi \in S_0(\mathcal{X})$, sur le point $r_{\mathcal{Y}}(f(\xi))$ de \mathcal{Y}_s .

Deuxième étape. Montrons que l'application \underline{f}_s de \mathcal{X}_s dans \mathcal{Y}_s que l'on vient de définir est *continue* en vérifiant que l'image réciproque d'un fermé irréductible Z de \mathcal{Y}_s est fermée dans \mathcal{X}_s . Il y a deux cas à distinguer.

1. Supposons tout d'abord que $Z = \{y\}$ soit un point fermé de \mathcal{Y}_s ; $c = r_{\mathcal{Y}}^{-1}(y)$ est une composante connexe de $\mathcal{Y}_{\eta} - S_0(\mathcal{Y})$ et

$$\underline{f}_s^{-1}(y) = r_{\mathcal{X}}(f^{-1}(c)).$$

Étant donné un point ξ de $S_0(\mathcal{X})$ tel que $f(\xi)$ appartienne à c , $f^{-1}(c)$ est un voisinage ouvert de ξ dans $\mathcal{X}_{\eta} - S_0(\mathcal{X})$ et rencontre donc toutes les composantes connexes de $\mathcal{X}_{\eta} - S_0(\mathcal{X})$ adhérentes à ξ ; on a par conséquent $f(c') \subset c$ pour toute composante $c' \in \pi_0(\mathcal{X}_{\eta} - S_0(\mathcal{X}))$ telle que $\xi \in \partial c'$, propriété qui se reformule de manière équivalente en disant que \underline{f}_s envoie toute la composante irréductible $\overline{\{r_{\mathcal{X}}(\xi)\}}$ de \mathcal{X}_s sur le point y . Ceci prouve que $\underline{f}_s^{-1}(y)$ est stable par spécialisation.

Il reste à voir que tout ouvert affine de \mathcal{X}_s ne contient qu'un nombre fini de composantes irréductibles de $\underline{f}_s^{-1}(y)$ de dimension 0. Celles-ci sont les points fermés x de \mathcal{X}_s tels que la composante connexe $c' = r_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$ de $\mathcal{X}_{\eta} - S_0(\mathcal{X})$ vérifie les conditions

- $c' \subset f^{-1}(c)$,
- $\partial c' \cap f^{-1}(c) = \emptyset$,

et il faut donc montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de telles composantes rencontrant un compact donné de \mathcal{X}_{η} .

Observant que $f(\overline{c'})$ est une partie fermée de \mathcal{Y}_{η} – c'est l'image d'un compact –,

$$\partial f(c') = \overline{f(c')} - f(c') \subset f(\overline{c'}) - f(c') \subset f(\overline{c'} - c') = f(\partial c').$$

Les conditions précédentes impliquent par conséquent que $\partial f(c')$ est disjoint de c , c'est-à-dire que $f(c')$ est un ouvert de c ; $f(c')$ est également un fermé de c puisque $f(c') = f(\overline{c'}) \cap c$ et nous obtenons ainsi l'égalité $f(c') = c$ en vertu de la connexité de c . L'ensemble Σ des composantes connexes de $f^{-1}(c)$ appliquées surjectivement sur c est localement fini : il s'injecte en effet naturellement dans la fibre de f au-dessus de chaque point de c .

Nous venons donc de voir que tout compact de \mathcal{X}_{η} ne rencontre qu'un nombre fini de composantes irréductibles de $\underline{f}_s^{-1}(y)$ de dimension 0, ce qui achève de prouver que $\underline{f}_s^{-1}(y)$ est une partie fermée de \mathcal{X}_s .

2. Supposons maintenant que Z soit une composante irréductible de \mathcal{Y}_s , de point générique $\tilde{\eta} = r_{\mathcal{Y}}(\eta)$, $\eta \in S_0(\mathcal{Y})$. Vérifions tout d'abord que, si $\underline{f}_s^{-1}(Z)$ contient un point fermé x de \mathcal{X}_s , il contient toute une composante irréductible de \mathcal{X}_s passant par x . Ceci se reformule ainsi : étant données une composante $c \in \pi_0(\mathcal{Y}_{\eta} - S_0(\mathcal{Y}))$ telle que $\eta \in \partial c$ et une composante $c' \in \pi_0(\mathcal{X}_{\eta} - S_0(\mathcal{X}))$ telle que $f(c') \subset c$, il existe un point $\xi \in \partial c'$ tel que $f(\xi) \in c$ ou $f(\xi) = \eta$. Si $f^{-1}(c)$ ne rencontre pas $\partial c'$, nous venons de prouver qu'alors $f(c') = c$; on en déduit que le fermé $f(\overline{c'})$ est l'adhérence de c dans \mathcal{Y}_{η} , ce qui implique que f envoie surjectivement $\partial c'$ sur ∂c et fournit l'existence d'un point $\xi \in \partial c'$ tel que $f(\xi) = \eta$.

Il ne reste plus, pour établir que $\underline{f}_s^{-1}(Z)$ est un fermé de \mathcal{X}_s , qu'à montrer que c'est une partie stable par spécialisation. Soit ξ un point dans $S_0(\mathcal{X})$ tel que $r_{\mathcal{X}}(\xi)$ appartienne à $\underline{f}_s^{-1}(Z)$. Notons que, puisque Z est une partie fermée de \mathcal{Y}_s , $r_{\mathcal{Y}}^{-1}(Z)$ est un ouvert de \mathcal{Y}_{η} ; $r_{\mathcal{X}}^{-1}(\underline{f}_s^{-1}(Z)) = f^{-1}(r_{\mathcal{Y}}^{-1}(Z))$ est alors un voisinage ouvert de ξ dans \mathcal{X}_{η} et rencontre donc

toutes les composantes connexes de $\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$ adhérentes à ξ . Ceci prouve l'inclusion $\overline{\{r_{\mathcal{X}}(\xi)\}} \subset \underline{f}_s^{-1}(Z)$.

Troisième étape. Il suffit maintenant de définir le prolongement \underline{f} de f comme le morphisme de S -schémas formels $(\underline{f}_s, \underline{f}^\#) : \mathcal{X} = (\mathcal{X}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \rightarrow \mathcal{Y} = (\mathcal{Y}_s, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}})$, où $\underline{f}_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{Y}_s$ est l'application continue que l'on vient de décrire entre les espaces topologiques et $\underline{f}^\#$ est l'homomorphisme entre les faisceaux structuraux caractérisé par la condition suivante : pour tous ouverts affines $U \subset \mathcal{X}_s$ et $V \subset \mathcal{Y}_s$ tels $\underline{f}_s(U) \subset V$ – c'est-à-dire tels que f envoie le domaine affinoïde $r_{\mathcal{X}}^{-1}(U)$ dans le domaine affinoïde $r_{\mathcal{Y}}^{-1}(V)$ –, $\underline{f}^\#$ est l'homomorphisme de

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) = \Gamma(r_{\mathcal{X}}^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta})^\circ$$

dans

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) = \Gamma(r_{\mathcal{Y}}^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\eta})^\circ$$

induit par l'homomorphisme d'algèbres strictement k -affinoïdes

$$f^\# : \Gamma(r_{\mathcal{X}}^{-1}(U), \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}) \rightarrow \Gamma(r_{\mathcal{Y}}^{-1}(V), \mathcal{O}_{\mathcal{Y}_\eta}).$$

(ii) Le morphisme \underline{f} est localement de type fini. S'il est quasi-fini, sa fibre au-dessus de tout point fermé de \mathcal{Y}_s ne contient aucun point générique de \mathcal{X}_s , condition qui s'écrit de manière équivalente sous la forme

$$f(S_0(\mathcal{X})) \subset S_0(\mathcal{Y}).$$

Réciproquement, si cette condition est vérifiée, le raisonnement conduit lors de la deuxième étape montre que les fibres de \underline{f} sont discrètes. \square

Domaines analytiques compacts.

PROPOSITION 2.1.16. — *Soit \mathcal{X} une S -courbe quasi-compacte dont la fibre générique est irréductible.*

(i) *Si \mathcal{X}_s est propre, \mathcal{X}_η est propre.*

(ii) *Si \mathcal{X}_s n'est pas propre – c'est-à-dire si l'une au moins de ses composantes irréductibles est affine –, \mathcal{X}_η est un espace strictement k -affinoïde.*

Démonstration. Notons tout d'abord que les composantes irréductibles de la \tilde{k} -courbe séparée \mathcal{X}_s sont des \tilde{k} -courbes algébriques affines ou propres.

La k° -algèbre $\mathcal{A} = \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ est topologiquement de présentation finie et le morphisme structural $\mathcal{X} \rightarrow S$ se factorise par $\mathcal{Y} = \mathrm{Spf}(\mathcal{A})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X} & & \\ \downarrow & \searrow p & \\ & \mathcal{Y} & \\ & \swarrow & \\ & S. & \end{array}$$

Le morphisme $p_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{Y}_s$ induit un isomorphisme de chaque composante irréductible affine de \mathcal{X}_s sur une composante irréductible affine de \mathcal{Y}_s et contracte chacune des composantes irréductibles propres de \mathcal{X}_s sur un point de \mathcal{Y}_s . La \tilde{k} -courbe algébrique \mathcal{X}_s étant connexe, \mathcal{Y}_s est un \tilde{k} -schéma affine connexe et il y a donc deux possibilités :

- si \mathcal{X}_s est une courbe propre, \mathcal{Y}_s est un point, auquel cas p est la *factorisation de Stein* du morphisme propre p ;

– si la courbe \mathcal{X}_s n'est pas propre, \mathcal{Y}_s est une \tilde{k} -courbe algébrique affine.

La conclusion est immédiate dans le premier cas : l'espace strictement k -analytique \mathcal{X}_η est compact et sans bord (2.1.2), donc propre.

Envisageons maintenant le second cas. Les morphismes p et p_η sont *propres*, surjectifs et, leurs factorisations de Stein étant manifestement triviales, à fibres connexes. Puisque l'espace strictement k -analytique \mathcal{X}_η est, par hypothèse, irréductible, l'image de p_η est un sous-espace strictement k -analytique irréductible de \mathcal{Y}_η , nécessairement de dimension 1 vu la surjectivité de p_η . On en déduit que p_η est une *bijection*, et donc un isomorphisme ([3], 2.2.7, (iii), complété par [4], 1.2.1, Remarks, (i)). \square

COROLLAIRE 2.1.17. — *Soit X une S -courbe formelle séparée dont la fibre générique X est irréductible et soit $Y_1, Y_2 \subset X$ deux domaines strictement k -affinoïdes ; si $Y_1 \cup Y_2 \neq X$, $Y_1 \cup Y_2$ est un domaine strictement k -affinoïde.*

Démonstration. Le cas de deux domaines strictement k -affinoïdes d'intersection vide est trivial : $Y_1 \cup Y_2 = \mathcal{M}(A_{Y_1} \oplus A_{Y_2})$. Nous pouvons donc supposer $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, auquel cas $Y_1 \cup Y_2$ est connexe.

Il existe un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ et des ouverts $U_1, U_2 \subset \mathcal{Y}_s$ tels que $Y_i = (\mathcal{Y}_{|U_i})_\eta$ ([25], §3). Le morphisme q étant séparé, $\mathcal{Y}_{|U_1 \cup U_2}$ est une S -courbe dont la fibre générique $Y_1 \cup Y_2$ est irréductible.

Si la \tilde{k} -courbe $U_1 \cup U_2$ est *propre*, c'est une partie ouverte et fermée de \mathcal{Y}_s ; il en est de même pour $Y_1 \cup Y_2 \subset \mathcal{X}_\eta$ et donc $Y_1 \cup Y_2$ puisque \mathcal{X}_η est connexe. La conclusion découle donc de la proposition précédente. \square

COROLLAIRE 2.1.18. — *Soit X une courbe strictement k -analytique irréductible ; tout compact strict $K \subset X$ est l'intersection d'une famille décroissante de domaines strictement k -affinoïdes.*

Démonstration. Les domaines strictement k -affinoïdes formant un système fondamental de voisinages des points de X , tout compact $K \subset X$ est contenu dans un domaine strictement k -analytique compact de X . En vertu du corollaire précédent, un domaine strictement k -analytique compact distinct de X est un domaine strictement k -affinoïde ; ainsi, les domaines strictement k -affinoïdes forment un système fondamental de voisinages des compacts stricts de X . \square

Classification des points.

Soient x un point d'une courbe strictement k -analytique X et $\mathcal{H}(x)$ son corps résiduel complété. L'extension résiduelle $\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}$ est de degré de transcendance au plus 1, noté $s(x)$, et le groupe abélien $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$ est de rang au plus 1, noté $t(x)$; l'inégalité

$$s(x) + t(x) \leq 1$$

est toujours vérifiée.

Reprenant la terminologie de [3], le point x sera dit

- de type (2) si $s(x) = 1$,
- de type (3) si $t(x) = 1$.

Dans ces deux cas, l'extension $\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\tilde{k}$ et le groupe abélien $|\mathcal{H}(x)^\times|/|k^\times|$ sont de type fini.

Les points de type (2) ou (3) (resp. de type (2)) sont encore caractérisés par la propriété suivante : $x \in X$ est de type (2) ou (3) (resp. de type (2)) si et seulement s'il existe un domaine k -affinoïde (resp. un domaine strictement k -affinoïde $Y \subset X$) tel que $\Gamma(Y) = \{x\}$.

Lorsque $s(x) = t(x) = 0$, le point x est dit

- de type (1) lorsque l'extension non archimédienne $\mathcal{H}(x)/k$ se plonge dans la complétion d'une clôture algébrique de k :

$$\begin{array}{ccc} & \widehat{k^a} & \\ & \uparrow & \swarrow \\ k & \longrightarrow & \mathcal{H}(x), \end{array}$$

- de type (4) sinon.

Parmi les points de type (1) figurent en particulier ceux tels que l'extension $\mathcal{H}(x)/k$ soit finie ; ce sont les points traditionnellement considérés en géométrie rigide et ils forment un sous-ensemble partout dense de X , noté X_0 .

Il est clair qu'un morphisme fini $f : Y \rightarrow X$ conserve le type des points : tous les points de la fibre $f^{-1}(x)$ sont du type de x ; il en va de même pour le changement de base $k \rightarrow \widehat{k^a}$.

LEMME 2.1.19. — *Soient x un point d'une courbe strictement k -analytique X et $p_x : X \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \rightarrow X$ la projection canonique ; les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) x est de type (1) ;
- (ii) $s(y) = 0$ pour tout point $y \in p_x^{-1}(x)$.

Démonstration. On peut supposer $X = \mathbb{A}_k^1$.

Soient x un point dans \mathbb{A}_k^1 et $x^* : k[T] \rightarrow \mathcal{H}(x)$ l'homomorphisme correspondant ; le $\mathcal{H}(x)$ -point \underline{x} de $\mathbb{A}_{\mathcal{H}(x)}^1$ défini par l'homomorphisme

$$\mathcal{H}(x)[T] \rightarrow \mathcal{H}(x), \quad T \mapsto x^*T$$

est tel que $p_x(\underline{x}) = x$ et on pose

$$r(x) = \sup_{p_x^{-1}(x)} |T - \underline{x}|$$

([3], 4.2). Le disque ouvert $D(\underline{x}, r(x)) = \{y \in \mathbb{A}_{\mathcal{H}(x)}^1 ; |T - \underline{x}|(y) < r(x)\}$ est trivialement contenu dans la fibre $p_x^{-1}(x)$ et la conclusion découle de ce que le point x est de type (1) si et seulement si $r(x) = 0$ ([3], 4.2). \square

Extension des scalaires.

Soient X une courbe k -analytique et K/k une extension non archimédienne ; posons $X_K = X \widehat{\otimes}_k K$ et soit $p_K : X_K \rightarrow X$ le morphisme canonique.

Étant donné un point $x \in X$ de type (2) ou (3), considérons un domaine k -affinoïde $Y \subset X$ tel que $\Gamma(Y) = \{x\}$. Le bord de Shilov du domaine K -affinoïde $Y_K = Y \widehat{\otimes}_k K$ de X_K est contenu dans la fibre de $p_K^{-1}(x)$ d'après [3], 2.2.5 et il définit un sous-ensemble fini $i_K(x)$ de $p_K^{-1}(x)$, formé de points de type (2) ou (3), qui ne dépend clairement pas du choix de Y . Dans le cas d'un point x de type (2), \widetilde{Y} est une \widetilde{k} -courbe algébrique (affine) intègre et $i_K(x)$ est l'image réciproque de l'ensemble des points génériques de la \widetilde{K} -courbe affine $\widetilde{Y} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{K}$ par l'application de réduction $Y_K \rightarrow \widetilde{Y} \otimes_{\widetilde{k}} \widetilde{K}$ (2.1.1, Réductions).

LEMME 2.1.20. — *L'ensemble $p_K^{-1}(x) - i_K(x)$ est un ouvert de X_K .*

Démonstration. C'est évident puisque $Y_K - \Gamma(Y_K)$ est un ouvert de X_K en vertu de la proposition 2.1.12. \square

PROPOSITION 2.1.21. — *Soient X une courbe strictement k -analytique et $\Omega \subset X$ un ouvert tel que tous les points de $\partial\Omega$ soient de type (2) ou (3) ; étant donnée une extension non archimédienne K/k , tous les points de $\partial p_K^{-1}(\Omega)$ sont de type (2) ou (3).*

Démonstration. D'après le lemme précédent,

$$\bigcup_{x \in \partial\Omega} i_K^{-1}(x) = p_K^{-1}(\partial\Omega) - \bigcup_{x \in \partial\Omega} (p_K^{-1}(x) - i_K(x))$$

est un fermé de X_K et la conclusion découle de ce qu'il contient $\partial p_K^{-1}(\Omega)$. \square

Recouvrements.

L'espace topologique sous-jacent à une courbe strictement k -analytique est de dimension 1 : tout recouvrement ouvert localement fini \mathcal{U} admet un raffinement localement fini \mathcal{U}' tel que trois ouverts distincts dans \mathcal{U}' soient d'intersection vide ([3], 3.2.1). Nous terminons cette section par la description d'un système final de recouvrements ouverts localement finis d'une courbe strictement k -analytique.

PROPOSITION 2.1.22. — *Soit X un espace k -analytique connexe et paracompact de dimension 1 et soit \mathcal{U} un recouvrement ouvert localement fini de $\Omega = X - \partial X$. Il existe un recouvrement ouvert localement fini \mathcal{V} de Ω raffinant \mathcal{U} et tel que, posant*

$$S = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \partial V,$$

tout point de S soit de type (2) et contenu dans un unique ouvert $V \in \mathcal{V}$.

Démonstration. On peut supposer que les éléments de \mathcal{U} sont relativement compacts (raffiner \mathcal{U} si nécessaire).

Un premier raffinement de \mathcal{U} permet de supposer que les points de ∂U sont de type (2) pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$. Fixons en effet $U_0 \in \mathcal{U}$; le fermé

$$F_0 = \Omega - \bigcup_{U \in \mathcal{U} ; U \neq U_0} U$$

est contenu dans U_0 et il existe un domaine strictement k -affinoïde $Y_0 \subset U_0$ tel que

$$F_0 \subset Y_0 - \partial Y_0.$$

On obtient un raffinement de \mathcal{U} en remplaçant U_0 par $U'_0 = Y_0 - \partial Y_0$. Appliquant le même raisonnement à chacun des ouverts $U_{1,1}, \dots, U_{1,n} \in \mathcal{U}$ rencontrant U'_0 – il n'y en a qu'un nombre fini –, on obtient des ouverts $U'_{1,1}, \dots, U'_{1,n}$ tels que $\partial U'_{1,i} \subset I(X)$ pour tout i et $\{U'_0, U'_{1,1}, \dots, U'_{1,n}\} \cup (\mathcal{U} - \{U_0, U_{1,1}, \dots, U_{1,n}\})$ soit un recouvrement de Ω raffinant \mathcal{U} ; raisonnant par récurrence transfinie, on peut, après raffinement, supposer que la frontière de tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ est un ensemble fini de points de type (2).

Sous cette hypothèse, la réunion S des ∂U , $U \in \mathcal{U}$, est un ensemble localement fini de points de type (2) dans \mathcal{X}_η . Quels que soient l'ouvert $U \in \mathcal{U}$ et la composante connexe C de $\Omega - S$,

$$C \cap U = C \cap \overline{U}$$

puisque $\partial U = \overline{U} - U$ est contenu dans S et donc $C \subset U$ ou $C \cap U = \emptyset$; par suite, étant donné un point $x \in S$ et un ouvert $U \in \mathcal{U}$ contenant x , toute composante connexe de $\Omega - S$ adhérente à x est contenue dans U . Soit Ω_x la réunion des composantes connexes de $\Omega - S$ qui sont adhérentes à x ; c'est un voisinage de x dans Ω qui, d'après ce que l'on vient de dire, est contenu dans tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ qui contient x .

La famille $\{\Omega_x\}_{x \in S}$ est un recouvrement ouvert localement fini de Ω qui raffine le recouvrement \mathcal{U} ; S est la réunion des $\partial \Omega_x$, $x \in S$, et un point y de S appartient à l'ouvert Ω_x si et seulement si $y = x$. Ce recouvrement satisfait à toutes les conditions de l'énoncé. \square

2.2. S -courbes semi-stables

Le contenu de cette partie est un cas très particulier des constructions introduites par Berkovich dans [5].

2.2.1. Courbes $\mathfrak{S}(a)$

Soit a un élément non nul de k° et soit $\mathcal{A}(a)$ la k° -algèbre topologiquement de présentation finie

$$k^\circ\{T_0, T_1\}/(T_0T_1 - a).$$

L'épimorphisme canonique $k^\circ\{T_0, T_1\} \rightarrow \mathcal{A}(a)$ induit un isomorphisme α du sous k° -module libre

$$M = \left\{ f = \sum_{\nu=(\nu_0, \nu_1) \in \mathbb{N}^2} a_\nu(f) T_0^{\nu_0} T_1^{\nu_1} \in k^\circ\{T_0, T_1\} ; a_\nu(f) = 0 \text{ si } \nu_0\nu_1 \neq 0 \right\}$$

de $k^\circ\{T_0, T_1\}$ sur $\mathcal{A}(a)$. L'homomorphisme de k -algèbres de Banach

$$\varphi : k\{T_0, T_1\} \rightarrow k\{|a|T^{-1}, T\}$$

défini par $\varphi(T_0) = aT^{-1}$, $\varphi(T_1) = T$, réalise un isomorphisme du k -espace de Banach $M \otimes_{k^\circ} k$ sur $k\{|a|T^{-1}, T\}$ et $\varphi \circ \alpha^{-1}$ est un isomorphisme isométrique entre la k -algèbre de Banach $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$, munie de la norme définie par le k° -module $\mathcal{A}(a)$, et la k -algèbre de Banach $k\{|a|T^{-1}, T\}$, munie de sa norme spectrale. Il découle de ces observations que :

- (i) la k° -algèbre $\mathcal{A}(a)$ est plate,
- (ii) l'homomorphisme canonique $\mathcal{A}(a) \rightarrow (\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k)^\circ$ est un isomorphisme,
- (iii) pour tout $\rho = (\rho_0, \rho_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0}^2$ tel que $\rho_0\rho_1 = |a|$, la (semi-)norme sur $M \otimes_{k^\circ} k \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ induite par l'application

$$k\{T_0, T_1\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad f = \sum_{\nu} a_\nu(f) T_0^{\nu_0} T_1^{\nu_1} \mapsto \max_{\nu} |a_\nu(f)| \rho^\nu$$

définit via α une (semi-)norme multiplicative sur $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$, notée η_ρ .

Soit $\mathfrak{S}(a)$ le S -schéma formel $\mathrm{Spf}(\mathcal{A}(a))$. Sa fibre générique est le domaine strictement k -affinoïde $\{x \in \mathbb{A}_k^1 \mid |a| \leq |T_1(x)| \leq 1\}$ de la droite affine sur k tandis que sa fibre spéciale est le tore $\mathbb{G}_{m_{\tilde{k}}}$ si $|a| = 1$, la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_k^1 & \\ & \uparrow & \\ 0 & & \\ & \mathrm{Spec}(\tilde{k}) & \xrightarrow{0} \mathbb{A}_{\tilde{k}}^1 \end{array}$$

si $|a| < 1$.

Introduisons le polytope entier

$$S(|a|) = \{t \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t_0, 0 \leq t_1 \text{ et } t_0 + t_1 = -\log |a|\},$$

de groupe structural (cf. 1.1.1)

$$\Lambda(S(|a|)) = (\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}t_0 \oplus \mathbb{Z}t_1)/\mathbb{Z}(\log |a| + t_0 + t_1).$$

L'application

$$\mu : \mathfrak{S}(a)_\eta \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto (-\log |T_0(x)|, -\log |T_1(x)|)$$

est continue et à valeurs dans $S(|a|) \subset \mathbb{R}^2$; elle admet une section continue

$$\iota : S(|a|) \rightarrow \mathfrak{S}(a)_\eta, \quad \mathbf{t} \mapsto \eta_{e^{-\mathbf{t}}}$$

réalisant un homéomorphisme de $S(|a|)$ sur un fermé $S(\mathfrak{S}(a))$ de $\mathfrak{S}(a)_\eta$.

Par définition, le *squelette* de $\mathfrak{S}(a)$ est le polytope entier $(\mathfrak{S}(a), \mu^* \Lambda(S(|a|)))$. L'application $\iota \circ \mu : \mathfrak{S}(a)_\eta \rightarrow S(\mathfrak{S}(a))$, notée τ , est une *rétraction* de $\mathfrak{S}(a)_\eta$ sur son squelette.

Étant donnée une extension non archimédienne K de k , $\mathfrak{S}(a)_\eta \widehat{\otimes}_k K = (\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))_\eta$ et le morphisme canonique $p : \mathfrak{S}(a)_\eta \widehat{\otimes}_k K \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ induit une application de $S(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$ dans $S(\mathfrak{S}(a))$; c'est un *isomorphisme* de polytopes entiers s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{S}(a)_\eta \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{\tau} & S(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)) \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathfrak{S}(a)_\eta & \xrightarrow{\tau} & S(\mathfrak{S}(a)). \end{array}$$

Les squelettes $S(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$ et $S(\mathfrak{S}(a))$ sont donc canoniquement isomorphes; pour alléger l'écriture, nous écrirons $S(\mathfrak{S}(a))_K$ en lieu et place de $S(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$.

Il est facile de donner une caractérisation intrinsèque du squelette de $\mathfrak{S}(a)$. Commençons par observer que le groupe structural de ce polyèdre entier s'identifie au sous-groupe de $C^0(|\mathfrak{S}(a)_\eta|, \mathbb{R})$ engendré par \mathbb{R} et les fonctions $\log |f|$, $f \in (\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k)^\times$: c'est le contenu du lemme suivant.

LEMME 2.2.1. — *Soit $|\cdot|_{\mathrm{sp}}$ la norme spectrale de la k -algèbre de Banach $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$; le groupe $(\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k)^\times$ des inversibles de l'anneau $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$ est constitué des éléments de la forme*

$$\alpha T_0^{n_0} T_1^{n_1} (1 + g),$$

où $\alpha \in k^\times$, $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, $g \in \mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$ et $|g|_{\mathrm{sp}} < 1$.

En particulier : l'image de l'homomorphisme

$$(\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k)^\times \rightarrow C^0(|\mathfrak{S}(a)_\eta|, \mathbb{R}), f \mapsto \log |f|,$$

est le sous-groupe abélien engendré par $\log |k^\times|$ et les fonctions $\log |T_0|$, $\log |T_1|$.

Démonstration. Les éléments de $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$ pouvant s'écrire comme dans l'énoncé forment un sous-groupe $I \subset (\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k)^\times$ et il suffit donc de vérifier que tout élément inversible de $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$ appartient à I .

Considérons tout d'abord le cas particulier $a = 1$. La norme spectrale $|\cdot|_{\mathrm{sp}}$ de la k -algèbre de Banach $k\{T^{-1}, T\}$ étant multiplicative (en vertu de l'irréductibilité de $\mathrm{Spec}(\tilde{k}[T])$, proposition 2.1.2), un élément inversible f de $k\{T^{-1}, T\}$ est de la forme $f = \alpha g$, avec $\alpha \in k^\times$ tel que $|\alpha| = |f|_{\mathrm{sp}}$ et $g \in k^\circ\{T^{-1}, T\}^\times$. La réduction de g dans $\tilde{k}[T^{-1}, T]$ est inversible, donc de la forme βT^n avec $\beta \in \tilde{k}$ et $n \in \mathbb{Z}$, et g s'écrit par conséquent

$$g = \gamma T^n + h = \gamma T^n (1 + h'),$$

où $\gamma \in k^\circ - k^{\circ\circ}$, $h \in k^{\circ\circ}\{T^{-1}, T\}$ et $h' = \gamma^{-1} T^{-n} h$. Comme $|h'|_{\mathrm{sp}} = |h|_{\mathrm{sp}} < 1$, f appartient à I .

Le cas général se déduit du cas $a = 1$. C'est immédiat si $|a| = 1$ puisqu'alors $\mathcal{A}(a) \simeq \mathcal{A}(1)$, de sorte que l'on peut supposer $|a| < 1$. Identifions $\mathcal{A}(a) \otimes_{k^\circ} k$ et $k\{|a|T^{-1}, T\}$ en posant

$T_1 = T$, $T_0 = aT^{-1}$ et considérons un élément inversible $f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n$ dans $k\{|a|T^{-1}, T\}$. Quel que soit le nombre réel $r \in [|a|, 1]$, l'image de f par l'homomorphisme $k\{|a|T^{-1}, T\} \rightarrow k\{rX^{-1}, r^{-1}X\}$, $T \mapsto X$, est inversible (c'est la restriction de f au domaine k -affinoïde $|T| = r$) et il en est de même après une extension non archimédienne K/k telle que $r \in |K^\times|$. Étant donnée l'identification $K\{rX^{-1}, r^{-1}X\} \simeq K\{Y^{-1}, Y\}$, la discussion précédente implique l'existence d'un unique entier relatif $N(r)$ tel que $|a_{N(r)}|r^{N(r)} = \max_n(|a_n|r^n) = |f|_r$, $|\cdot|_r$ désignant la norme spectrale sur $k\{rX^{-1}, r^{-1}X\}$.

L'application $N : [|a|, 1] \rightarrow \mathbb{Z}$, $r \mapsto N(r)$ est localement constante : soit en effet $r_0 \in [|a|, 1]$; la suite $(|a_n|r^n)$ tendant vers 0 lorsque $|n|$ tend vers $+\infty$ pour tout $r \in [|a|, 1]$, il existe un sous-ensemble fini I de \mathbb{Z} et un voisinage V de r_0 dans $[|a|, 1]$ tels que

$$\max_{n \in \mathbb{Z}} |a_n| r^n = \max_{n \in I} |a_n| r^n$$

pour tout $r \in V$ et les inégalités $|a_{N(r_0)}|r^{N(r_0)} > |a_n|r^n$, $n \in I - \{N(r_0)\}$, sont vérifiées sur tout un voisinage de r_0 dans V .

L'application N est donc constante et il existe ainsi un entier relatif N tel que :

$$|a_n| < |a_N| \quad \text{et} \quad |a_n||a|^n < |a_N||a|^N$$

pour tout $n \in \mathbb{Z} - \{N\}$. Ces inégalités peuvent s'écrire sous la forme

$$\max \left(\max_{n \neq N} (|a_n a_N^{-1}|), \max_{n \neq N} (|a_n a_N^{-1}| |a|^{n-N}) \right) < 1,$$

c'est-à-dire $\left| \left(\sum_{n \in \mathbb{Z} - \{N\}} a_n a_N^{-1} T^{n-N} \right) \right|_{\text{sp}} < 1$, et nous obtenons finalement la formule

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n = a_N T^N \left(1 + \sum_{n \in \mathbb{Z} - \{N\}} a_n a_N^{-1} T^{n-N} \right) = a_N T^N (1 + g)$$

avec $|g|_{\text{sp}} < 1$. La démonstration est achevée. \square

Remarque 2.2.2. — Le lemme précédent n'est bien entendu pas autre chose que l'assertion classique selon laquelle un élément $f \in k\{|a|T^{-1}, T\}$ est inversible si et seulement si son polygone de Newton $\{(x, y) \in [0, -\log |a|] \times \mathbb{R} ; y = \max_n \log |a_n| e^{-nx}\}$ est un segment ; c'est d'ailleurs exactement ce que l'on a démontré.

Passons à la description du fermé $S(\mathfrak{S}(a))$ de $\mathfrak{S}(a)_\eta$.

DÉFINITION 2.2.3. — *Un espace k -affinoïde X est dit potentiellement isomorphe au disque unité s'il existe une extension finie séparable k' de k telle que l'espace k' -affinoïde $X \otimes_k k'$ soit isomorphe à une somme (nécessairement finie) de copies du disque unité $E_{k'}(0, 1) = \{x \in \mathbb{A}_{k'}^1 \mid |T_1(x)| \leq 1\}$.*

Remarque 2.2.4. — Un domaine k -affinoïde est potentiellement isomorphe au disque unité si et seulement si chacune de ses composantes connexes l'est.

PROPOSITION 2.2.5. — *Pour tout $a \in k^\circ - \{0\}$, le fermé $S(\mathfrak{S}(a)) \subset \mathfrak{S}(a)_\eta$ est le complémentaire de l'ensemble des points de $\mathfrak{S}(a)_\eta$ ayant un voisinage k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unité.*

Rappelons que, pour tout point $x \in \mathbb{A}_k^1$, il existe une et une seule composante connexe Ω de $\mathbb{A}_k^1 - \{x\}$ dont l'adhérence dans \mathbb{A}_k^1 n'est pas compacte ; on la qualifera de *non bornée*.

LEMME 2.2.6. — *Un domaine k -affinoïde connexe V dans \mathbb{A}_k^1 est potentiellement isomorphe au disque unité si et seulement s'il possède un unique point de Shilov ξ et coïncide avec le complémentaire, dans \mathbb{A}_k^1 , de la composante connexe non bornée de $\mathbb{A}_k^1 - \{\xi\}$.*

Démonstration. L'image d'un morphisme non constant $\varphi : \mathcal{M}(k\{T\}) \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ est le disque $\{|T_1 - f(0)| \leq |f - f(0)|_{\text{sup}} = |f - f(0)|(\eta)\}$, $f \in k\{T\}$ étant la série entière φ^*T_1 ; c'est le complémentaire dans \mathbb{A}_k^1 de la composante connexe non bornée de $\mathbb{A}_k^1 - \{\varphi(\eta)\}$ (η est le point de Shilov de $\mathcal{M}(k\{T\})$).

Un domaine k -affinoïde $V \subset \mathbb{A}_k^1$, connexe et potentiellement isomorphe au disque unité, est l'image d'un morphisme non constant $\varphi : \mathcal{M}(k'\{T\}) \rightarrow \mathbb{A}_k^1$, k' étant une extension séparable finie de k . Le morphisme φ se factorise par le morphisme canonique $q : \mathbb{A}_{k'}^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ et, puisque l'image du morphisme induit de $\mathcal{M}(k'\{T\})$ dans $\mathbb{A}_{k'}^1$ est le complémentaire dans $\mathbb{A}_{k'}^1$ de la composante non bornée de $\mathbb{A}_{k'}^1 - \{\varphi'(\eta')\}$, V est le complémentaire dans \mathbb{A}_k^1 de la composante connexe non bornée de $\mathbb{A}_k^1 - \{\varphi(\eta')\}$ (η' est le point de Shilov de $\mathcal{M}(k'\{T\})$).

Soient réciproquement $\xi \in \mathbb{A}_k^1$ un point de type (2) – c'est-à-dire tel que l'extension de corps $\widetilde{\mathcal{H}(x)}/\widetilde{k}$ soit de degré de transcendance 1 – et V le complémentaire de la composante connexe non bornée de $\mathbb{A}_k^1 - \{\xi\}$. Par densité de l'ensemble E des points $x \in \mathbb{A}_k^1$ tels que $\kappa(x)$ soit une extension séparable finie de k , il existe un point de E appartenant à l'ouvert non vide $V - \{\xi\}$; soit $f \in k[T_1]$ son polynôme minimal unitaire. La fonction $|f|$ atteint son maximum sur le compact V en un point de la frontière ∂V , donc en ξ ; par suite, V est contenu dans le domaine strictement k -affinoïde $\{|f| \leq |f(\xi)|\}$ et coïncide en fait avec lui puisque $\mathbb{A}_k^1 - V$ est la composante connexe non bornée de $\mathbb{A}_k^1 - \{\xi\}$. Ceci prouve que V est un domaine strictement k -affinoïde dont ξ est l'unique point de Shilov. Enfin, f étant par hypothèse séparable sur k , V est isomorphe à une somme de copies du disque unité sur toute extension séparable finie k' de k décomposant f et telle que $|f(\xi)| \in |k'^{\times}|$. \square

Démonstration de la proposition 2.2.5. Identifions $\mathfrak{S}(a)_\eta$ au domaine strictement k -affinoïde $\{|a| \leq |T_1| \leq 1\}$ de \mathbb{A}_k^1 et introduisons l'ouvert Ω de $\mathfrak{S}(a)_\eta$ constitué des points admettant un voisinage k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unité.

Étant donné un tel domaine k -affinoïde connexe $V \subset \mathfrak{S}(a)_\eta$, les deux composantes connexes de $\mathbb{A}_k^1 - \mathfrak{S}(a)_\eta$ sont contenues dans l'ouvert connexe $U = \mathbb{A}_k^1 - V$; celui-ci contient en particulier 0, et donc toute l'image de l'application continue $\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ envoyant le nombre réel positif r sur la semi-norme

$$\eta_r : k[T] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \sum_n a_n T^n \mapsto \max_n (|a_n| r^n)$$

car U est connexe par arcs et tout chemin continue reliant 0 au point à l'infini contient l'image de cette application. Puisque l'image de $\iota : S(|a|) \rightarrow \mathfrak{S}(a)_\eta \subset \mathbb{A}_k^1$ est le fermé $\{\eta_r ; r \in [|a|, 1]\}$, cela prouve l'inclusion $\Omega \subset \mathfrak{S}(a)_\eta - S(\mathfrak{S}(a))$.

L'inclusion réciproque $\mathfrak{S}(a)_\eta - S(\mathfrak{S}(a)) \subset \Omega$ découle du fait suivant : pour tout point $t \in S(|a|) \subset \mathbb{R}$, $\tau^{-1}(t) \cap (\mathfrak{S}(a)_\eta - S(\mathfrak{S}(a)))$ est la réunion d'une famille croissante de domaines k -affinoïdes potentiellement isomorphes au disque unité. Cette assertion est triviale si $t \notin \sqrt{|k^\times|}$ puisque la fibre $\tau^{-1}(t)$ est réduite au point $\iota(t)$. Si $t \in \sqrt{|k^\times|}$, il existe un point $x \in \tau^{-1}(t)$ tel que l'extension $\kappa(x)/k$ soit finie et séparable; notant f le polynôme minimal unitaire de x sur k , l'ouvert $\tau^{-1}(t) - \{\iota(t)\}$ coïncide avec $\{|f| < |f(\iota(t))|\}$ et est la réunion des domaines strictement k -affinoïdes potentiellement isomorphes au disque unité $\{|f| \leq \alpha_n\}$, (α_n) étant une suite strictement croissante dans $\sqrt{|k^\times|}$ qui converge vers $|f|(\iota(t))$. \square

Remarque 2.2.7. — Soit ξ un point de type (2) dans $\mathfrak{S}(a)_\eta - S(\mathfrak{S}(a))$; le complémentaire V de la composante connexe non bornée de $\mathbb{A}_k^1 - \{\xi\}$ est un domaine k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unité, que l'on peut décrire en termes d'éclatements admissibles ; rappelons qu'il s'agit des éclatements, dans la catégorie des S -schémas formels, des Idéaux cohérents et ouverts (voir [10], 2).

On note r l'application de réduction $\mathfrak{S}(a)_\eta \rightarrow \mathfrak{S}(a)_s$.

- Si $r(\xi)$ est un point lisse de $\mathfrak{S}(a)_s$, il existe un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, centré au point $r(\xi)$, tel que la fibre spéciale réduite de \mathcal{Y} soit la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathfrak{S}(a)_s & \\ & \uparrow r(\xi) & \\ \text{Spec}(\kappa(r(\xi))) & \xrightarrow{\infty} & \mathbb{P}_{\kappa(r(\xi))}^1 \end{array}$$

et V soit la fibre générique du S -schéma formel induit par \mathcal{Y} sur l'ouvert $\mathcal{Y}_s^{\text{réd}} - \mathfrak{S}(a)_s \simeq \mathbb{A}_{\kappa(r(\xi))}^1$.

- Si $r(\xi)$ est le point singulier de $\mathfrak{S}(a)_s$, il existe un éclatement admissible $q_1 : \mathcal{Y}_1 \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, centré en $r(\xi)$, tel que la fibre spéciale réduite de \mathcal{Y}_1 soit la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{A}_k^1 \amalg \mathbb{A}_k^1 & \\ & \uparrow 0 & \\ \text{Spec}(k) \amalg \text{Spec}(k) & \xrightarrow[0 \amalg \infty]{} & \mathbb{P}_k^1, \end{array}$$

et, notant r' l'application de réduction $\mathcal{Y}_{1,\eta} \rightarrow \mathcal{Y}_{1,s}$, un éclatement admissible $q_2 : \mathcal{Y}_2 \rightarrow \mathcal{Y}_1$, centré en un point fermé de $\mathbb{P}_k^1 - \{0, \infty\} \subset \mathcal{Y}_{1,s}$, tel que la fibre spéciale réduite de \mathcal{Y}_2 soit la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{Y}_{1,s}^{\text{réd}} & \\ & \uparrow r'(\xi) & \\ \text{Spec}(\kappa(r'(\xi))) & \xrightarrow{\infty} & \mathbb{P}_{\kappa(r'(\xi))}^1, \end{array}$$

et V soit la fibre générique du S -schéma formel induit par \mathcal{Y}_2 sur l'ouvert $\mathcal{Y}_{2,s}^{\text{réd}} - \mathcal{Y}_{1,s}^{\text{réd}} \simeq \mathbb{A}_{\kappa(r'(\xi))}^1$. Le point de $\mathcal{Y}_{1,\eta} = \mathfrak{S}(a)_\eta$ envoyé par r' sur le point générique du diviseur exceptionnel de $\mathcal{Y}_{1,s}$ est le point $\tau(\xi)$ de $S(\mathfrak{S}(a))$.

Dans les deux cas envisagés, les fibres spéciales \mathcal{Y}_s , $\mathcal{Y}_{1,s}$ et $\mathcal{Y}_{2,s}$ sont réduites si (et seulement si) $|\kappa(\xi)^\times| = |k^\times|$. Finalement : étant donné un domaine k -affinoïde V de $\mathfrak{S}(a)_\eta$ potentiellement isomorphe au disque unité, il existe, après un changement de base $S' \rightarrow S$, $S' = \text{Spf}(k'^\circ)$ avec k'/k une extension séparable finie, un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, centré en $r(\xi)$, et un ouvert U de \mathcal{Y}_s tels que

- (i) la fibre spéciale \mathcal{Y}_s soit réduite ;
- (ii) l'adhérence de U soit une réunion de composantes irréductibles de \mathcal{Y}_s isomorphes à $\mathbb{P}_{k'}^1$;
- (iii) $V \otimes_k k'$ s'identifie à la fibre générique du S' -schéma formel induit par \mathcal{Y} sur U .

2.2.2. Le squelette d'une S -courbe simplement semi-stable : début

La construction du squelette et de la rétraction se généralise naturellement aux S -courbes formelles admettant localement un morphisme étale vers une S -courbe $\mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ - \{0\}$. Introduisons plus précisément la définition habituelle suivante.

DÉFINITION 2.2.8. — *Une S -courbe \mathcal{X} est dite simplement semi-stable s'il existe un recouvrement par des ouverts U admettant un morphisme étale $p_U : U \rightarrow \mathfrak{S}(a(U))$, $a(U) \in k^\circ - \{0\}$.*

Remarque 2.2.9

1. La fibre générique d'une S -courbe *simplement semi-stable* \mathcal{X} est un espace strictement k -analytique rig-lisse, c'est-à-dire tel que le G -faisceau $\Omega_{\mathcal{X}_\eta/k}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta}$ -module localement libre.
2. L'adverbe *simplement* vient de ce que l'on travaille avec la topologie de Zariski ; on pourrait, plus généralement, considérer les S -courbes qui, localement pour la topologie étale, sont isomorphes à une courbe $\mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ - \{0\}$. Cette restriction a pour effet de garantir la lissité de chacune des composantes irréductibles de \mathcal{X}_s . Soient en effet C une k -courbe localement algébrique et $p : C \rightarrow \mathfrak{S}(a)_s$ un morphisme étale avec $0 < |a| < 1$. Les composantes irréductibles de C sont lisses : étant donné un point singulier \tilde{x} de C et une composante irréductible Z de C passant par \tilde{x} , l'image de Z par p est contenue dans une composante irréductible Y de $\mathfrak{S}(a)_s$ et le changement de base $Y \hookrightarrow \mathfrak{S}(a)_s$ donne lieu à un morphisme étale $p|_Z : Z \rightarrow Y$; la lissité de Y implique celle de Z au point \tilde{x} .
Pour ce qui suit, la restriction aux courbes *simplement* semi-stables n'est pas indispensable.
3. La déformation des singularités quadratiques montre qu'une S -courbe \mathcal{X} est simplement semi-stable si et seulement si sa fibre générique \mathcal{X}_η est lisse et sa fibre spéciale \mathcal{X}_s est une \tilde{k} -courbe (localement algébrique) dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires et dont les composantes irréductibles sont lisses.

Passons maintenant à la construction du squelette d'une S -courbe simplement semi-stable.

THÉORÈME 2.2.10. — *Il existe, pour toute S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} , un unique couple $(S(\mathcal{X}), \tau_{\mathcal{X}})$, constitué d'un polyèdre entier de dimension au plus 1 et d'une application $\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$, tel que :*

- (i) *l'espace topologique sous-jacent à $S(\mathcal{X})$ soit un fermé de \mathcal{X}_η et l'application $\tau_{\mathcal{X}}$ soit une rétraction, c'est-à-dire induise l'identité sur $S(\mathcal{X})$;*
- (ii) *pour tout ouvert U de \mathcal{X} , $S(\mathcal{X}) \cap U_\eta$ est un domaine polyédral dans $S(\mathcal{X})$ et l'immersion canonique $(\mathcal{X}|_U)_\eta \hookrightarrow \mathcal{X}_\eta$ induit un isomorphisme de $S(\mathcal{X}|_U)$ sur $S(\mathcal{X}) \cap U_\eta$, compatible aux rétractions ;*
- (iii) *quel que soit le morphisme étale $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ entre deux S -courbes semi-stables, p_η induit une application de $S(\mathcal{X})$ dans $S(\mathcal{Y})$ qui est un isomorphisme G -local de polyèdres entiers s'insérant dans un diagramme commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ p_\eta \downarrow & & \downarrow p_\eta \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}). \end{array}$$

La démonstration du théorème 2.2.10 s'étend jusqu'à la proposition 2.2.20.

La caractérisation du fermé $S(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_\eta$ reprend la description de $S(\mathfrak{S}(a)) \subset S(\mathfrak{S}(a))_\eta$ donnée dans la proposition 2.2.5.

LEMME 2.2.11. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe, $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ un morphisme étale ($a \in k^\circ - \{0\}$) et $V \subset \mathcal{X}_\eta$, $Z \subset \mathfrak{S}(a)_\eta$ des domaines k -affinoïdes ;*

- *si V est potentiellement isomorphe au disque unité, il en est de même pour $p(V)$;*
- *si $p^{-1}(Z) \neq \emptyset$ et Z est potentiellement isomorphe au disque unité, il en est de même pour $p^{-1}(Z)$.*

Démonstration. Soit $V \subset \mathcal{X}_\eta$ un domaine k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unité. Chaque composante connexe de V est l'image de $\mathcal{M}(k'\{T\})$ par un morphisme non constant, k' étant une extension finie séparable convenable de k , et $p(V)$ est donc un domaine k -affinoïde potentiellement isomorphe au disque unité (lemme 2.2.6).

Soit $Z \subset \mathfrak{S}(a)_\eta$ un domaine k -affinoïde connexe et potentiellement isomorphe au disque unité. Après un changement de base $S' \rightarrow S$, avec $S' = \mathrm{Spf}(k'^\circ)$, k' étant une extension finie séparable de k , il existe un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, centré en un point fermé \tilde{x} de $\mathfrak{S}(a)_s$, et un ouvert U de \mathcal{Y}_s tels que le \tilde{k} -schéma \mathcal{Y}_s soit réduit, l'adhérence de U soit une réunion de composantes irréductibles isomorphes à \mathbb{P}_k^1 et Z s'identifie à la fibre générique du schéma formel induit par \mathcal{Y} sur U . Si l'image réciproque $p^{-1}(Z)$ est non vide, la fibre de p_s au-dessus de \tilde{x} est non vide et le morphisme induit par p entre les schémas formels semi-locaux $\mathcal{X}_{p_s^{-1}(\tilde{x})}$ et $\mathfrak{S}(a)_{\tilde{x}}$ est étale et fini. Considérons alors le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}' & \xrightarrow{q'} & \mathcal{X} \\ p' \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{Y} & \xrightarrow{q} & \mathfrak{S}(a); \end{array}$$

le morphisme p' est étale et il est fini au-dessus de $q^{-1}(\tilde{x})$; il induit donc un revêtement étale au-dessus du sous-schéma fermé réduit \overline{U} de \mathcal{Y}_s . Chacune des composantes irréductibles de \overline{U} étant, par hypothèse, isomorphe à \mathbb{P}_k^1 , le revêtement $p'^{-1}_s(\overline{U}) \rightarrow \overline{U}$ est isotrivial ; nous pouvons donc supposer, quitte à faire un nouveau changement de base $S'' \rightarrow S'$ du même type que précédemment, que le revêtement $U' = p'^{-1}(U) \rightarrow U$ est trivial. Le revêtement $p' : \mathcal{Y}'_{|U'} \rightarrow \mathcal{Y}_U$ est alors trivial et, par passage aux fibres génériques, chaque composante connexe de $p^{-1}(Z) = (\mathcal{Y}'_{|U'})_\eta$ est isomorphe à Z . Ceci achève de prouver que le domaine k -affinoïde $p^{-1}(Z)$ est potentiellement isomorphe au disque unité. \square

COROLLAIRE 2.2.12. — *Soient \mathcal{C} une S -courbe et r l'application de réduction $\mathcal{C}_\eta \rightarrow \mathcal{C}_s$; pour tout point fermé lisse \tilde{x} de \mathcal{C}_s , l'ouvert $r^{-1}(\tilde{x})$ est la réunion d'une suite croissante de domaines k -affinoïdes potentiellement isomorphes au disque unité.*

Démonstration. Quitte à remplacer \mathcal{C} par $\mathcal{C}_{|U}$, où U est un voisinage ouvert de \tilde{x} dans \mathcal{C}_s , on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $p : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{S}(1)$. La fibre Ω de l'application de réduction $\mathfrak{S}(1)_\eta \rightarrow \mathfrak{S}(1)_s$ au-dessus du point $p(\tilde{x})$ étant la réunion d'une suite croissante de domaines k -affinoïdes potentiellement isomorphes au disque unité (voir la démonstration de la proposition 2.2.5), il en est de même pour $r^{-1}(\tilde{x}) = p^{-1}(\Omega)$ d'après le lemme précédent. \square

DÉFINITION 2.2.13. — *Pour toute S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} , $S(\mathcal{X})$ est le fermé de \mathcal{X}_η dont le complémentaire est la réunion des domaines k -affinoïdes potentiellement isomorphes au disque unité et contenus dans $\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$.*

LEMME 2.2.14. — *Pour tout ouvert U de \mathcal{X} et tout morphisme étale $p : U \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ - \{0\}$,*

$$S(\mathcal{X}) \cap U_\eta = S(\mathcal{X}|_U) = p^{-1}S(\mathfrak{S}(a)).$$

Démonstration. Soit $V \subset \mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$ un domaine k -affinoïde connexe et potentiellement isomorphe au disque unité; l'image de V est une partie constructible et, l'application de réduction étant anti-continue, connexe de $\mathcal{X}_s - \mathcal{X}_s^{(0)}$, c'est-à-dire un point fermé. L'égalité $S(\mathcal{X}) \cap U_\eta = S(\mathcal{X}|_U)$ en découle pour tout ouvert U de \mathcal{X} .

La seconde égalité $S(\mathcal{X}|_U) = p^{-1}S(\mathfrak{S}(a))$ est une reformulation du lemme 2.2.11. \square

Étant donnée une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} , le lemme 2.2.14 permet de travailler localement sur \mathcal{X} pour définir la structure de polyèdre entier sur $S(\mathcal{X})$ et la rétraction $\tau_{\mathcal{X}} \rightarrow S(\mathcal{X})$.

PROPOSITION 2.2.15. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe connexe et $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ un morphisme étale.*

- *Si la courbe \mathcal{X}_s est lisse, elle est irréductible et $S(\mathcal{X}) = S_0(\mathcal{X})$.*
- *Supposons $0 < |a| < 1$; si la fibre de p au-dessus du point singulier de $\mathfrak{S}(a)_s$ est réduite à un point, p induit un homéomorphisme de $S(\mathcal{X})$ sur $S(\mathfrak{S}(a))$.*

Démonstration. Les composantes irréductibles d'une \tilde{k} -courbe lisse coïncidant avec ses composantes connexes, \mathcal{X}_s est irréductible si elle lisse. L'image du morphisme $p_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathfrak{S}(a)_s$ est contenue dans l'une des composantes irréductibles de $\mathfrak{S}(a)_s$, déterminant un point $\xi \in S_0(\mathfrak{S}(a)) \subset S(\mathfrak{S}(a))$, et $p^{-1}(S(\mathfrak{S}(a))) = p^{-1}(\xi) = S_0(\mathcal{X})$.

Passons au second point de l'énoncé.

La courbe \mathcal{X}_s étant un \tilde{k} -schéma affine (car quasi-compacte et étale sur la \tilde{k} -courbe affine $\mathfrak{S}(a)_s$), la fibre générique \mathcal{X}_η de \mathcal{X} est un espace (strictement) k -affinoïde; l'espace topologique $|\mathcal{X}_\eta|$ est en particulier compact et l'application continue de $|\mathcal{X}_\eta|$ dans $|\mathfrak{S}(a)_\eta|$ est donc propre. Il suffit alors de vérifier que p induit une bijection de $p^{-1}(S(\mathfrak{S}(a)))$ sur $S(\mathfrak{S}(a))$; ce sera automatiquement un homéomorphisme.

Il s'agit donc de prouver que la fibre du morphisme $p : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathfrak{S}(a)_\eta$ est réduite à un point au-dessus de tout $x \in S(\mathfrak{S}(a)) \subset \mathfrak{S}(a)_\eta$.

Observons tout d'abord que la démonstration peut se faire après passage à une quelconque extension non archimédienne K de k : dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{q'} & \mathcal{X}_\eta \\ p \downarrow & & \downarrow p \\ \mathfrak{S}(a)_\eta \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{q} & \mathfrak{S}(a)_\eta, \end{array}$$

le morphisme q induit un homéomorphisme de $S(\mathfrak{S}(a))_K = S(\mathfrak{S}(a) \widehat{\otimes}_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$ sur $S(\mathfrak{S}(a))$ et le morphisme q' est surjectif.

Appliquant cette remarque avec $K = \mathcal{H}(x)$ – le complété du corps résiduel de x – nous pouvons supposer que le point x est de type (2), de groupe des valeurs $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$.

Soit $b \in k^\circ$ tel que $|T_1(x)| = |b|$. Il existe un éclatement admissible $\mathcal{Y} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ et un ouvert U de \mathcal{Y}_s tels que

- le S -schéma formel $\mathcal{Y}|_U$ soit isomorphe à $\mathfrak{S}(b)$,
- le point x appartienne au bord de $S(\mathfrak{S}(b)) \subset S(\mathfrak{S}(a))$,

et il est donc finalement suffisant de vérifier que les fibres de l'application $p : S(\mathcal{X}) \rightarrow S(\mathfrak{S}(a))$ sont réduites à un point au-dessus du bord $S_0(\mathfrak{S}(a))$ de $S(\mathfrak{S}(a))$, c'est-à-dire qu'il existe une unique composante irréductible de \mathcal{X}_s au-dessus de chacune des deux composantes irréductibles de $\mathfrak{S}(a)_s$.

Soit \tilde{x} l'unique point de \mathcal{X}_s au-dessus du point singulier de $\mathfrak{S}(a)_s$. Il passe exactement deux composantes irréductibles de \mathcal{X}_s par le point \tilde{x} et, le lieu singulier de \mathcal{X}_s étant réduit à \tilde{x} , toutes les autres composantes irréductibles de \mathcal{X}_s doivent être lisses et donc définir des composantes connexes de \mathcal{X}_s . La courbe \mathcal{X}_s étant par hypothèse connexe, elle possède ainsi exactement deux composantes irréductibles, passant par le point singulier \tilde{x} et dominant les deux composantes irréductibles de $\mathfrak{S}(a)_s$. Les fibres de l'application $p : S(\mathcal{X}) \rightarrow S(\mathfrak{S}(a))$ sont donc réduites à un point au-dessus du bord $S_0(\mathfrak{S}(a))$ de $S(\mathfrak{S}(a))$. \square

Soit \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable et considérons un recouvrement \mathcal{U} de \mathcal{X}_s par des ouverts connexes tel que :

- chaque $U \in \mathcal{U}$ contienne au plus un point singulier de \mathcal{X}_s ,
- si $U, V \in \mathcal{U}$ sont deux ouverts distincts, $U \cap V$ ne contienne aucun point singulier de \mathcal{X}_s ,
- il existe, pour tout $U \in \mathcal{U}$, un morphisme étale $p_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \mathfrak{S}(a(U))$, $a(U) \in k^\circ - \{0\}$.

Étant donné $U \in \mathcal{U}$, $S(\mathcal{X}) \cap (\mathcal{X}_U)_\eta = S(\mathcal{X}_U) = p_{U,\eta}^{-1}(S(\mathfrak{S}(a(U))))$ contient les points de $S_0(\mathcal{X})$ au-dessus des points génériques de U et $p_{U,\eta}$ réalise un homéomorphisme de $S(\mathcal{X}) \cap (\mathcal{X}_U)_\eta$ sur son image dans $S(\mathfrak{S}(a))$, laquelle est une face de ce polytope entier. Il existe par suite, pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$, une unique application $\tau_U : (\mathcal{X}_U)_\eta \rightarrow S(\mathcal{X}_U)$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{X}_U)_\eta & \xrightarrow{\tau_U} & S(\mathcal{X}_U) \\ p_{U,\eta} \downarrow & & \downarrow p_{U,\eta} \\ \mathfrak{S}(a(U))_\eta & \xrightarrow{\tau} & S(\mathfrak{S}(a)) \end{array}$$

soit commutatif ; pour tout $U \in \mathcal{U}$, la restriction de τ_U à $S(\mathcal{X}_U)$ est l'identité. Le recollement des ces applications en une rétraction $\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$ est immédiat : si $U, V \in \mathcal{U}$ sont deux ouverts distincts, $U \cap V$ est par hypothèse un ouvert irréductible disjoint de $\text{Sing}(\mathcal{X}_s)$ et $(\mathcal{X}_{U \cap V})_\eta$ est envoyé par chacune des rétractions τ_U, τ_V sur le point de $S_0(\mathcal{X})$ au-dessus du point générique de $U \cap V$.

Quels que soient les points distincts $x, y \in S(\mathcal{X})$, des domaines k -affinoïdes connexes $V, W \subset \mathcal{X}_\eta$ tels que $\Gamma(V) = \{x\}$ et $\Gamma(W) = \{y\}$ sont nécessairement disjoints. Il suffit en effet de le vérifier pour les domaines k -affinoïdes $V \cap (\mathcal{X}_U)_\eta$ et $W \cap (\mathcal{X}_U)_\eta$, U parcourant \mathcal{U} : leurs images par $p_{U,\eta}$ sont des domaines k -affinoïdes dans $\mathfrak{S}(a(U))_\eta$ satisfaisant à la même condition et la conclusion est alors immédiate.

L'observation précédente permet de vérifier que l'application $\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$ que l'on vient de définir ne dépend pas du choix des morphismes étales $p_U : \mathcal{X}_U \rightarrow \mathfrak{S}(a(U))$: elle induit en effet l'identité sur $S(\mathcal{X})$ et, pour tout $x \in \mathcal{X}_\eta$, le point $\tau_{\mathcal{X}}(x)$ de $S(\mathcal{X})$ est uniquement déterminé par la condition intrinsèque suivante : il existe un domaine k -affinoïde connexe $V \subset \mathcal{X}_\eta$ contenant x et dont $\tau_{\mathcal{X}}(x)$ est l'unique point de Shilov.

PROPOSITION 2.2.16. — Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux S -courbes simplement semi-stables et $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un S -morphisme étale ; le morphisme $f_\eta : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta$ envoie $S(\mathcal{X})$ dans $S(\mathcal{Y})$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ f_\eta \downarrow & & \downarrow f_\eta \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}) \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration. Traitons tout d'abord le cas où $\mathcal{Y} = \mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ - \{0\}$. L'inclusion $f_\eta(S(\mathcal{X})) \subset S(\mathfrak{S}(a))$ découle du lemme 2.2.14. Considérons un recouvrement \mathcal{U} de \mathcal{X}_s par des ouverts connexes U contenant au plus un point singulier de \mathcal{X}_s , deux ouverts distincts dans \mathcal{U} ayant de plus une intersection disjointe de $\text{Sing}(\mathcal{X}_s)$; reprenant la description qui précède la proposition, nous pouvons construire à partir des cartes étales $f|_U : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ une rétraction $\tau'_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau'_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ f_\eta \downarrow & & \downarrow f_\eta \\ \mathfrak{S}(a)_\eta & \xrightarrow{\tau} & S(\mathfrak{S}(a)) \end{array}$$

soit commutatif, la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$ étant, elle, définie à partir de morphismes étales $p_U : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a(U))$, $a(U) \in k^\circ - \{0\}$; la caractérisation intrinsèque de la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$ donnée précédemment implique l'identité $\tau_{\mathcal{X}} = \tau'_{\mathcal{X}}$.

Le cas d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} quelconque se déduit trivialement du cas particulier $\mathcal{Y} = \mathfrak{S}(a)$: considérons en effet un recouvrement \mathcal{U} de \mathcal{Y}_s par des ouverts connexes tel que :

- chaque ouvert $U \in \mathcal{U}$ contienne au plus un point singulier de \mathcal{Y}_s ,
- deux ouverts distincts $U, V \in \mathcal{U}$ aient une intersection disjointe de $\text{Sing}(\mathcal{Y}_s)$,
- il existe pour tout $U \in \mathcal{U}$ un morphisme étale $p_U : \mathcal{Y}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a(U))$, $a(U) \in k^\circ - \{0\}$.

Puisque $S(\mathcal{Y}) \cap (\mathcal{Y}|_U)_\eta = S(\mathcal{Y}|_U) = p_{U,\eta}^{-1}(S(\mathfrak{S}(a(U))))$ (lemme 2.2.14) et $(p_U \circ f)_\eta(S(\mathcal{X})) \subset S(\mathfrak{S}(a(U)))$, $f_\eta(S(\mathcal{X})) \cap (\mathcal{Y}|_U)_\eta \subset S(\mathcal{Y}) \cap (\mathcal{Y}|_U)_\eta$ pour tout $U \in \mathcal{U}$ et donc $f_\eta(S(\mathcal{X})) \subset S(\mathcal{Y})$.

Dans le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} (\mathcal{X}|_{f^{-1}(U)})_\eta & \xrightarrow{f_\eta} & (\mathcal{Y}|_U)_\eta & \xrightarrow{p_{U,\eta}} & \mathfrak{S}(a(U))_\eta \\ \tau_{\mathcal{X}} \downarrow & & \downarrow \tau_{\mathcal{Y}} & & \downarrow \tau \\ S(\mathcal{X}|_{f^{-1}(U)}) & \xrightarrow{f_\eta} & S(\mathcal{Y}|_U) & \xrightarrow{p_{U,\eta}} & S(\mathfrak{S}(a(U))) \end{array}$$

les égalités

$$p_{U,\eta} \circ f_\eta \circ \tau_{\mathcal{X}} = \tau \circ p_{U,\eta} \circ f_\eta$$

et

$$p_{U,\eta} \circ \tau_{\mathcal{Y}} = \tau \circ p_{U,\eta}$$

sont connues d'après la première partie de la démonstration ; l'application $p_{U,\eta}$ étant injective, la commutativité du diagramme en découle. En vertu des identités $S(\mathcal{X}|_{f^{-1}(U)}) = S(\mathcal{X}) \cap$

$(\mathcal{X}_{|f^{-1}(U)})_\eta$, $S(\mathcal{Y}|_U) = S(\mathcal{Y}) \cap (\mathcal{Y}|_U)_\eta$, $U \in \mathcal{U}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ f_\eta \downarrow & & \downarrow f_\eta \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}) \end{array}$$

est également commutatif. \square

2.2.3. Le squelette d'une S -courbe simplement semi-stable : fin.

Rappelons que, pour tout S -schéma formel plat et localement de présentation finie \mathcal{X} , $\Lambda_k(\mathcal{X})$ est le sous-groupe du groupe abélien $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ image de l'homomorphisme canonique

$$(\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_{k^\circ} k)^\times \rightarrow C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}), \quad f \mapsto \log |f|$$

et $\Lambda(\mathcal{X})$ est le sous-groupe engendré par $\Lambda_k(\mathcal{X})$ et \mathbb{R} (2.1.1).

Soit \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable ; il reste, pour achever la démonstration du théorème 2.2.10, à définir la structure de polyèdre entier sur $S(\mathcal{X})$ et à vérifier sa compatibilité aux S -morphisms étales.

Tout ce dont nous avons besoin est contenu dans la proposition suivante.

PROPOSITION 2.2.17. — *Soit U un ouvert connexe de \mathcal{X}_s rencontrant $\text{Sing}(\mathcal{X}_s)$ en au plus un point ; pour tout morphisme étale $p : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, où*

- $|a| = 1$ si U est lisse,
- $0 < |a| < 1$ si U contient un point singulier de \mathcal{X}_s ,

l'homomorphisme $\Lambda(p) : \Lambda_k(\mathfrak{S}(a)) \rightarrow \Lambda_k(\mathcal{X}|_U)$ est un isomorphisme.

Démonstration. La proposition 2.2.15, jointe à la condition sur $|a|$, implique que p_η réalise un homéomorphisme de $S(\mathcal{X}|_U)$ sur $S(\mathfrak{S}(a))$, identifiant $S_0(\mathcal{X})$ et $S_0(\mathfrak{S}(a))$.

Les fibres spéciales \mathcal{X}_s et $\mathfrak{S}(a)_s$ étant réduites, $|\mathcal{H}(x)|^\times = |k^\times|$ pour tout point $x \in S_0(\mathcal{X}) \cup S_0(\mathfrak{S}(a))$.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k(\mathfrak{S}(a)) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Hom}(S_0(\mathfrak{S}(a)), \log |k^\times|) \\ \Lambda(p) \downarrow & & \downarrow p^* \\ \Lambda_k(\mathcal{X}|_U) & \xrightarrow{\text{res}} & \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}), \log |k|^\times), \end{array}$$

dans laquelle la flèche p^* est un isomorphisme. La flèche $\Lambda_k(\mathfrak{S}(a)) \rightarrow \text{Hom}(S_0(\mathfrak{S}(a)), \log |k|^\times)$ est un isomorphisme en vertu du lemme 2.2.1 ; toutes les flèches de ce diagramme sont donc des isomorphismes. \square

COROLLAIRE 2.2.18. — *Pour tous $a, b \in k^\circ$ tels que $0 < |a|, |b| < 1$, les points singuliers des S -schémas formels $\mathfrak{S}(a)$ et $\mathfrak{S}(b)$ ont des voisinages étales isomorphes si et seulement si $|a| = |b|$.*

Considérons un recouvrement \mathcal{U} de \mathcal{X}_s par des ouverts connexes tel que :

- chaque $U \in \mathcal{U}$ contienne au plus un point singulier de \mathcal{X}_s ;
- l'intersection de deux ouverts distincts $U, V \in \mathcal{U}$ soit disjointe de $\text{Sing}(\mathcal{X}_s)$.

Pour tous $U, V \in \mathcal{U}$ distincts, $U \cap V$ est un ouvert irréductible et lisse de \mathcal{X}_s , $S(\mathcal{X}_{U \cap V})$ est réduit au point de $S_0(\mathcal{X})$ au-dessus du point générique de $U \cap V$ et le morphisme de polytopes

$$(S(\mathcal{X}_{|U \cap V}), \Lambda(\mathcal{X}_{|U \cap V})) \hookrightarrow (S(\mathcal{X}_{|U}), \Lambda(\mathcal{X}_{|U}))$$

induit par l'incusion $U \cap V \subset U$ est une immersion canonique de 0-face. La collection des $(S(\mathcal{X}_{|U}), \Lambda(\mathcal{X}_{|U}))$, $U \in \mathcal{U}$, est par conséquent un atlas \mathbb{Z} -polyédral sur l'espace topologique $S(\mathcal{X})$ et la proposition 2.2.17 garantit que la structure de polyèdre entier sur $S(\mathcal{X})$ ainsi obtenue ne dépend pas du choix du recouvrement ouvert \mathcal{U} .

Le recouvrement ouvert \mathcal{U} de \mathcal{X}_s étant de la forme précédente, l'espace topologique $S(\mathcal{X}_{|U})$ est réduit à un point si l'ouvert U est lisse, homéomorphe au segment $[0, 1]$ si U contient un point singulier de \mathcal{X}_s ; l'espace topologique $S(\mathcal{X})$ est donc naturellement homéomorphe au *graphe dual* de la \tilde{k} -courbe nodale \mathcal{X}_s et l'application de réduction $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$ induit, pour tout point $x \in S_0(\mathcal{X})$, une bijection du cône tangent $T_x S(\mathcal{X})$ à $S(\mathcal{X})$ en ξ sur l'ensemble des points singuliers de \mathcal{X}_s appartenant à la composante irréductible de \mathcal{X}_s de point générique $r(\xi)$.

Ce polyèdre entier est muni du *poïds* (cf. 1.2.1) défini par l'application

$$\pi_0(S(\mathcal{X}) - S_0(\mathcal{X})) \xrightarrow{\sim} \text{Sing}(\mathcal{X}_s) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

qui associe à la composante connexe de $S(\mathcal{X}) - S_0(\mathcal{X})$ correspondant à un point singulier \tilde{x} de \mathcal{X}_s le nombre entier strictement positif $[\kappa(\tilde{x}) : \tilde{k}]$.

Le polyèdre entier pondéré d'espace topologique sous-jacent $S(\mathcal{X})$ que l'on vient de définir est appelé le *squelette* de la S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} ; il sera également noté $S(\mathcal{X})$.

Remarque 2.2.19

1. Le polyèdre entier $S(\mathcal{X})$ est l'égalisateur du diagramme

$$\coprod_{(U,V) \in \mathcal{U}} S(\mathcal{X}_{|U \cap V}) \rightrightarrows \coprod_{U \in \mathcal{U}} S(\mathcal{X}_{|U})$$

dans la catégorie des polyèdres entiers.

2. Tout recouvrement de \mathcal{X}_s par des ouverts connexes contenant chacun au plus un des points singuliers de \mathcal{X}_s définit une décomposition élémentaire du polyèdre $S(\mathcal{X})$ sur laquelle le poïds est constant.
3. Puisque $S(\mathcal{X})$ s'identifie, en tant que polyèdre, au graphe dual de la \tilde{k} -courbe \mathcal{X}_s , l'application $S(\mathcal{X}) \rightarrow \mathcal{X}_s$ induite par la réduction de \mathcal{X}_η sur \mathcal{X}_s détermine une bijection entre $\pi_0(S(\mathcal{X}))$ et $\pi_0(\mathcal{X}_s)$. On en déduit que l'inclusion $S(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}_\eta$ induit une bijection entre $\pi_0(S(\mathcal{X}))$ et $\pi_0(\mathcal{X}_\eta)$.

PROPOSITION 2.2.20. — *Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux S -courbes simplement semi-stables et $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un morphisme étale. Le morphisme $f_\eta : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_\eta$ induit une application de $S(\mathcal{X})$ dans $S(\mathcal{Y})$ qui est un isomorphisme G -local de polyèdres entiers.*

Démonstration. Il a déjà été établi (proposition 2.2.16) que le morphisme f_η envoie le fermé $S(\mathcal{X})$ de \mathcal{X}_η dans le fermé $S(\mathcal{Y})$ de \mathcal{Y}_η .

Le résultat découle immédiatement de la proposition 2.2.17 lorsque $\mathcal{Y} = \mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ - \{0\}$: considérant un recouvrement \mathcal{U} de \mathcal{X} par des ouverts connexes contenant au plus un point singulier de \mathcal{X}_s , chaque morphisme $f_{|U} : \mathcal{X}_{|U} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ induit un isomorphisme du polytope entier $S(\mathcal{X}_{|U}) = S(\mathcal{X}) \cap (\mathcal{X}_{|U})_\eta$ sur une face du polytope entier $S(\mathfrak{S}(a))$.

Le cas général s'obtient en recouvrant \mathcal{Y}_s par des ouverts connexes U contenant au plus un point singulier de \mathcal{Y}_s et pour lesquels il existe un morphisme étale $p_U : \mathcal{Y}_U \rightarrow \mathfrak{S}(a(U))$, $a(U) \in k^\circ - \{0\}$ induisant un isomorphisme entre les polytopes entiers $S(\mathcal{X}_U)$ et $S(\mathfrak{S}(a(u)))$. \square

La démonstration du théorème 2.2.10 est maintenant achevée.

PROPOSITION 2.2.21. — *Soit \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable ; quelle que soit l'extension non archimédienne K/k , le morphisme canonique d'espaces analytiques $p_K : \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ envoie $S(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$ dans $S(\mathcal{X})$ et l'application induite est un isomorphisme G -local de polyèdres entiers pondérés.*

Démonstration. Les deux assertions de l'énoncé sont démontrées si elles le sont pour chacune des S -courbes \mathcal{X}_U , U parcourant un recouvrement ouvert de \mathcal{X}_s ; nous pouvons donc supposer qu'il existe un morphisme étale $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ induisant un isomorphisme du polyèdre entier $S(\mathcal{X})$ sur $S(\mathfrak{S}(a))$. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{p_K} & \mathcal{X}_\eta \\ q_{\eta,K} \downarrow & & \downarrow q_\eta \\ \mathfrak{S}(a)_\eta \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{p'_K} & \mathfrak{S}(a)_\eta \end{array}$$

il a été noté au début de 2.2.1 que le morphisme p'_K induit un isomorphisme du polyèdre entier $S(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$ sur $S(\mathfrak{S}(a))$, d'où il découle que le morphisme p_K définit une application de $S(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$ dans $S(\mathcal{X})$ qui est un morphisme de polyèdres entiers s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} S(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)) & \xrightarrow{p_K} & S(\mathcal{X}) \\ q_{\eta,K} \downarrow & & \downarrow q_\eta \\ S(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)) & \xrightarrow{p'_K} & S(\mathfrak{S}(a)). \end{array}$$

Les flèches p'_K et q_η sont des isomorphismes et, d'après la proposition 2.2.20, la flèche $q_{\eta,K}$ est un isomorphisme G -local ; le morphisme $p_K : S(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)) \rightarrow S(\mathcal{X})$ est finalement un isomorphisme G -local de polyèdres entiers.

Nous écrivons $S(\mathcal{X})_K$ en lieu et place de $S(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$.

Il reste à vérifier la compatibilité avec les poids. Notons $r : \mathcal{X}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_s$ et $r_K : \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K \rightarrow (\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))_s = \mathcal{X}_s \otimes_{\tilde{k}} \tilde{K}$ les applications de réduction, qui s'insèrent dans le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta \widehat{\otimes}_k K & \xrightarrow{r_K} & \mathcal{X}_s \otimes_{\tilde{k}} \tilde{K} \\ p_K \downarrow & & \downarrow p_{\tilde{K}} \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{r} & \mathcal{X}_s. \end{array}$$

Considérons un point ξ de $S_0(\mathcal{X})$ et un élément t de $T_\xi S(\mathcal{X})$, ce dernier correspondant à un point singulier \tilde{x} de \mathcal{X}_s contenu dans la composante irréductible de point générique $r(\xi)$. Étant donné un voisinage U de \tilde{x} dans \mathcal{X} et un morphisme étale $p : U \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ$, on peut restreindre U de telle sorte que \tilde{x} soit l'unique point de la fibre $p^{-1}(p(\tilde{x}))$; celle-ci est alors un $\kappa(p(\tilde{x})) = \tilde{k}$ -schéma fini et réduit (p est étale), de rang $[\kappa(\tilde{x}) : \tilde{k}]$. La fibre de

$(p \otimes 1) : U \otimes_S \mathrm{Spf}(K^\circ) \rightarrow \mathfrak{S}(a) \otimes_S \mathrm{Spf}(K^\circ)$ au-dessus du point singulier est, de même, un \tilde{K} -schéma fini et réduit ; puisqu'il s'identifie à $p^{-1}(p(x)) \otimes_{\tilde{k}} \tilde{K}$, il est de rang $[\kappa(\tilde{x}) : \tilde{k}]$ et donc

$$[\kappa(\tilde{x}) : \tilde{k}] = \sum_{\tilde{x}' \in p_K^{-1}(\tilde{x})} [\kappa(\tilde{x}') : \tilde{K}].$$

Cette dernière identité se réécrit sous la forme

$$w_\xi(t) = \sum_{\xi' \in p_K^{-1}(\xi)} \sum_{t' \in T_{\xi'} S(\mathcal{X})_K, t' \rightarrow t} w_{\xi'}(t'),$$

ce qui établit que p_K est un isomorphisme de polyèdres entiers pondérés (cf. remarque 1.2.3, 2). \square

La notation i_K que nous employons dans le lemme suivant a été définie en 2.1.3 (*Extension des scalaires*). Rappelons que, pour tout point x de X , $s(x)$ est le degré de transcendance de l'extension $\tilde{H}(x)/\tilde{k}$; x est dit de type (2) si et seulement si $s(x) = 1$.

LEMME 2.2.22. — *Soit \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable.*

(i) *Étant donné un sous-ensemble fini $\Sigma \subset S(\mathcal{X})$, il existe une extension non archimédienne K/k et un éclatement admissible $\mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)$ tels que \mathcal{Y} soit une $\mathrm{Spf}(K^\circ)$ -courbe simplement semi-stable et $i_K(\Sigma) \subset S_0(\mathcal{Y})$. L'extension K/k peut être choisie finie (séparable) si et seulement si tous les points de Σ sont de type (2).*

(ii) *Étant donné un ensemble fini Σ' de points de type (2) ou (3) dans \mathcal{X}_η , il existe une extension finie (séparable) k'/k et un éclatement admissible $\mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(k'^\circ)$ tels que \mathcal{Y}' soit une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable et $i_{k'}(\Sigma') \subset S(\mathcal{Y}')$.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas $\mathcal{X} = \mathfrak{S}(a)$.

(i) On peut supposer que l'ensemble Σ est réduit à un point x .

Considérons une extension non archimédienne K/k telle que $|\mathcal{H}(x')^\times| = |K^\times|$, où x' est le point de $S(\mathfrak{S}(a))_K$ correspondant à x dans l'identification canonique $S(\mathfrak{S}(a))_K = S(\mathfrak{S}(a))$; cette extension peut être choisie si (et seulement si) x est de type (2).

Fixons $b \in K^\times$ tel que $|T_0(x')| = |b|$; $|a| \leq |b| \leq 1$ et l'éclatement sur $\mathcal{S} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)$ de l'Idéal (T_0, b) – inversible en dehors du point singulier de $\mathfrak{S}(a)_s$ – donne lieu à un morphisme $q : \mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)$ tel que \mathcal{Z} soit une $\mathrm{Spf}(K^\circ)$ -courbe simplement semi-stable et $S_0(\mathcal{Z}) = S_0(\mathfrak{S}(a)) \cup \{x'\}$.

(ii) On peut de nouveau supposer Σ' réduit à un point x . Si $x \in S(\mathfrak{S}(a))$, il n'y a rien à démontrer ; sinon, le point $x' = \tau(x)$ de $S(\mathfrak{S}(a))$ est tel que $s(x') = 1$ et on vient de prouver qu'il existe une extension finie k'/k telle que le point de $S(\mathfrak{S}(a))_{k'}$ correspondant à x' dans l'identification canonique $S(\mathfrak{S}(a))_{k'} = S(\mathfrak{S}(a))$ appartienne à $S_0(\mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(k'^\circ))$. On est ainsi ramené au cas d'un point x tel que $\tau(x) \in S_0(\mathfrak{S}(a))$. L'application de réduction $\mathfrak{S}(a)_\eta \rightarrow \mathfrak{S}(a)_s$ envoie x sur un point lisse \tilde{x} appartenant à la composante irréductible de point générique $r(\tau(x))$.

Le complémentaire E de la composante connexe non bornée de $\mathfrak{S}(a)_\eta - \{x\} \subset \mathbb{A}_k^1 - \{x\}$ est un disque fermé de point de Shilov x . Soit y un point dans E tel que l'extension $\kappa(y)/k$ soit finie, de polynôme minimal f normalisé de telle sorte que $|f(\tau(x))| = 1$; choisissons également $b \in k^\times$ tel que $|f(x)| > |b|$. L'Idéal \mathcal{I} sur $\mathfrak{S}(a)$ tel que $\mathcal{I}_{\tilde{x}} = f\mathcal{O}_{\mathfrak{S}(a), \tilde{x}} + b\mathcal{O}_{\mathfrak{S}(a), \tilde{x}}$ et $\mathcal{I} = \mathcal{O}_{\mathfrak{S}(a)}$ sur $\mathfrak{S}(a)_s - \{\tilde{x}\}$ est admissible et son éclatement $q : \mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ fournit une S -courbe \mathcal{Z} dont

la fibre spéciale est la somme amalgamée du diagramme

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{P}_{\tilde{k}}^1 & \\ & \uparrow 0 & \\ \mathrm{Spec}(\tilde{k}) & \xrightarrow{\tilde{x}} & \mathfrak{S}(a)_s, \end{array}$$

qui devient simplement semi-stable après une extension finie k'/k et telle que $S(\mathcal{Z} \times_S \mathrm{Spf}(k'^\circ))$ contienne le sous-ensemble $i_{k'}(x)$.

Le cas d'une courbe simplement semi-stable quelconque se déduit directement de ce qui précède. On peut en effet supposer que \mathcal{X} est munie d'un morphisme étale $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$ car la question est locale sur \mathcal{X}_η .

Étant donnée une extension non-archimédienne (resp. une extension finie) K/k telle qu'il existe un éclatement admissible $q : \mathcal{Z} \rightarrow \mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)$ satisfaisant à la condition $i_K(p_\eta(\Sigma)) \subset S_0(\mathcal{Z})$ (resp. $i_K(\Sigma) \subset S(\mathcal{Z})$), l'éclatement admissible $q' : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ)$ défini par le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & \xrightarrow{q'} & \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ) \\ \downarrow & & \downarrow p \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{q} & \mathfrak{S}(a) \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ) \end{array}$$

fournit une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} telle que $i_K(\Sigma) \subset S_0(\mathcal{Y})$ (resp. $i_K(\Sigma) \subset S(\mathcal{Y})$).

L'extension K/k peut être choisie finie si tous les points de $p_\eta(\Sigma)$ sont de type (2), donc si tous les points de Σ sont de type (2).

Toutes les extensions finies peuvent être choisies séparables. \square

La proposition suivante sera utilisée au chapitre 3 (cf. théorème 3.2.10).

PROPOSITION 2.2.23. — *Soit Y un espace k -affinoïde rig-lisse de dimension 1. Toute composante connexe Ω de $\mathrm{Int}(Y)$ et la réunion d'une suite de domaines k -affinoïdes telle que, pour tout n :*

- $V_n \subset V_{n+1} - \partial V_{n+1}$;
- la frontière de chaque composante connexe de $V_{n+1} - V_n$ ne rencontre V_n (resp. V_{n+1}) qu'en un seul point.

Démonstration. Si l'on dispose d'une telle suite après une extension non archimédienne K/k , son image par la projection canonique $p : Y \widehat{\otimes}_k K \rightarrow Y$ satisfait aux conditions imposées car $p(\partial(V \widehat{\otimes}_k K)) = \partial V$ pour tout domaine k -affinoïde V ([3], proposition 3.1.3, (iv)). Nous pouvons donc supposer que Y est un domaine strictement k -affinoïde, fibre générique d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} .

La composante connexe Ω de $Y = \mathcal{Y}_\eta$ est l'image réciproque par l'application de réduction $r : \mathcal{Y}_\eta \rightarrow \mathcal{Y}_s$ d'un sous-schéma fermé (réduit) Z de \mathcal{Y}_s , propre sur \tilde{k} et connexe. Les points de $\partial\Omega$ sont en bijection avec l'ensemble des points génériques des composantes irréductibles affines de \mathcal{Y}_s rencontrant Z .

L'intersection $\Omega \cap S(\mathcal{Y})$ est un ouvert de $S(\mathcal{Y})$. Elle est vide si et seulement si Z est un point fermé lisse de \mathcal{Y}_s et la conclusion est dans ce cas immédiate puisque Ω est la réunion d'une suite croissante de domaines strictement k -affinoïdes ayant un unique point de Shilov

(corollaire 2.2.12). Si $\Omega \cap S(\mathcal{Y})$ est non vide, il découle immédiatement de la construction de $S(\mathcal{Y})$ que

$$\Omega = \tau^{-1}(\Omega \cap S(\mathcal{Y}));$$

il ne reste alors plus qu'à définir les domaines k -affinoïdes désirés par :

$$V_n = \tau^{-1}(S_n),$$

où (S_n) est une suite croissante de domaines polyédraux compacts de réunion S telle que, pour tout n , les composantes connexes de $S_{n+1} - S_n$ soient des polytopes entiers de dimension 1. \square

2.2.4. Polygones de Newton généralisés

La notion classique de *polygone de Newton* d'une série de Laurent à coefficients dans k permet l'étude des fonctions holomorphes sur les couronnes $\{r \leq |T_1| \leq R\} \subset \mathbb{Gm}_k$, $0 < r < R$, lesquelles sont essentiellement les fibres génériques des S -courbes $\mathfrak{S}(a)$ (cf. [Man], chapitre 1, par exemple). La construction du squelette d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} fournit le cadre d'une généralisation évidente pour les éléments f de $\Gamma(\mathcal{X}_\eta, \mathcal{O}_{\mathcal{X}_\eta})$, ledit polygone de Newton n'étant autre que le graphe de la fonction réelle $\log |f|_{|S(\mathcal{X})}$.

PROPOSITION 2.2.24. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable, de fibre générique $X = \mathcal{X}_\eta$, et f une section globale de \mathcal{O}_X , inversible sur un ouvert dense de X .*

(i) *La restriction F de la fonction $\log |f|$ à $S(\mathcal{X}) \subset X$ est affine par morceaux : $F \in A_{\mathbb{Z}}^0(S(\mathcal{X}))$.*

(ii) *Pour tout point $x \in S(\mathcal{X})$, $\log |f| \leq F(x)$ sur $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$, avec égalité si et seulement si f ne s'annule pas sur $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$; ainsi, la fonction $F \circ \tau_{\mathcal{X}}$ majore $\log |f|$ sur X , et il y a égalité si et seulement si $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$.*

(iii) *Pour tout $x \in S(\mathcal{X}) - \partial X$, le coefficient de δ_x dans $\mathrm{dd}^c F$ est le degré du diviseur $\mathrm{div}(f)|_{\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)}$; la mesure induite par $\mathrm{dd}^c F$ sur $S(\mathcal{X}) - \partial X$ est donc positive et F est harmonique sur $S(\mathcal{X}) - \partial X$ si et seulement si f est inversible sur l'ouvert $\tau^{-1}(S(\mathcal{X}) - \partial X)$ de X .*

Démonstration. Observons tout d'abord que la fonction $\log |f|$ prend des valeurs finies sur $S(\mathcal{X}) \subset X$: en effet, f étant génériquement inversible, elle ne peut s'annuler qu'en des points $x \in X$ tels que $[\kappa(x) : k] < \infty$ et la conclusion découle de ce que l'extension $\kappa(x)/k$ est transcendante pour tout point $x \in S(\mathcal{X})$.

Le support du diviseur de f étant un fermé localement fini de X , son image Σ par l'application propre $\tau_{\mathcal{X}}$ est un fermé localement fini de $S(\mathcal{X})$ tel que $s(x) = 1$ pour tout $x \in \Sigma$; il existe alors, par application du lemme 2.2.22, une extension finie k'/k et un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(k'^o)$ tel que \mathcal{Y} soit une $\mathrm{Spf}(k'^o)$ -courbe simplement semi-stable et $q^{-1}(\Sigma) \subset S_0(\mathcal{Y})$. Posons $S' = \mathrm{Spf}(k'^o)$; le morphisme canonique $p : \mathcal{X}_\eta \otimes_k k' \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ induit un isomorphisme G -local entre les polyèdres entiers pondérés $S(\mathcal{X} \times_S S')$ et $S(\mathcal{X})$ (proposition 2.2.21) et

$$\mathrm{dd}^c F = p_* \mathrm{dd}^c p^* F$$

(remarque 1.2.8, 4). Il est donc suffisant de démontrer la proposition pour $p^* f \in \Gamma(X \otimes_k k', \mathcal{O}_{X \otimes_k k'})$, ce qui permet de supposer que Σ est contenu dans $S_0(\mathcal{X})$ ou, de manière équivalente, que l'image du support de $\mathrm{div}(f)$ par l'application de réduction $X \rightarrow \mathcal{X}_s$ est disjointe du lieu singulier $\mathrm{Sing}(\mathcal{X}_s)$ de \mathcal{X}_s .

Soit, pour tout point $\tilde{x} \in \mathrm{Sing}(\mathcal{X}_s)$, $U_{\tilde{x}}$ un voisinage ouvert connexe de \tilde{x} dans $\mathcal{X}_s - r(|\mathrm{div}(f)|)$ tel que $U - \{\tilde{x}\}$ soit lisse; f étant inversible sur chacun des domaines

k -affinoïdes $r^{-1}(U_{\tilde{x}})$, $F|_{S(\mathcal{X}) \cap r^{-1}(U)} \in \Lambda_k(\mathcal{X}|_U)$ d'après le lemme 2.2.22 et le point (i) est démontré.

Pour tout $x \in S(\mathcal{X})$, $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$ est un domaine k -affinoïde dont x est l'unique point de Shilov. La restriction de f à $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$ atteint son maximum au point x , d'où l'inégalité $\log |f| \leq \log |f(x)| = F(x)$ sur $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$; appliquant le même raisonnement à f^{-1} , on obtient l'égalité $\log |f| = F(x)$ si f est inversible sur $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$. Réciproquement, puisque f ne peut s'annuler aux points de $S(\mathcal{X})$, $|\operatorname{div}(f)| \cap \tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x) = \emptyset$ si $\log |f| = F(x)$ sur $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$ et $f|_{\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)}$ est alors inversible; le point (ii) est démontré.

Étant donné un point $\xi \in S_0(\mathcal{X})$ et $\alpha \in k^\times$ tel que $|\alpha| = |f(\xi)|$, $\alpha^{-1}f$ est inversible au voisinage de ξ dans \mathcal{X} et donc induit une fonction méromorphe régulière \tilde{f}^ξ sur la composante irréductible $Z[\xi]$ de \mathcal{X}_s de point générique $r(\xi)$. Elle est indépendante du choix de α et son diviseur des pôles est localisé dans $\operatorname{Sing}(\mathcal{X}_s)$ puisque $|f| \leq |\alpha|$ sur $\tau_{\mathcal{X}}(\xi)$. Quel que soit l'élément t de $T_\xi S(\mathcal{X})$ correspondant à un point singulier \tilde{x} de \mathcal{X}_s contenu dans $Z[\xi]$,

$$\lambda_{\xi,t}(F) = -\operatorname{ord}_{\tilde{x}}(\tilde{f}^\xi)$$

(lemme 2.2.25 ci-dessous) et, vu la définition du poids dont est muni $S(\mathcal{X})$ (2.2.3),

$$\begin{aligned} \operatorname{dd}^c F &= \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} \left(\sum_{t \in T_\xi S(\mathcal{X})} \lambda_{\xi,t}(F) w_\xi(t) \right) \delta_\xi \\ &= \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} \left(\sum_{\tilde{x} \in X_s \cap Z[\xi]} (-\operatorname{ord}_{\tilde{x}}(\tilde{f}^\xi)) [\kappa(\tilde{x}) : \tilde{k}] \right) \delta_\xi. \end{aligned}$$

Le coefficient de $-\delta_{\tilde{x}}$ dans $\operatorname{dd}^c F$ est donc le degré de la composante du diviseur de \tilde{f}^ξ contenue dans $\operatorname{Sing}(\mathcal{X}_s)$. La k -courbe $Z[\xi]$ est propre si et seulement si $\xi \in S_0(\mathcal{X}) - \partial X$; par suite, pour tout point $\xi \in S_0(\mathcal{X}) - \partial X$, le coefficient de δ_ξ dans $\operatorname{dd}^c F$ n'est autre que le degré de la composante du diviseur de \tilde{f}^ξ contenu dans $\mathcal{X}_s - \operatorname{Sing}(\mathcal{X}_s)$. C'est également le degré de la composante de $\operatorname{div}(f)$ contenu dans le domaine k -affinoïde $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(x)$. En effet, si $Z[\xi]'$ est l'ouvert $Z[\xi] - (\operatorname{Sing}(\mathcal{X}_s) \cap Z[\xi])$ (remarquer que $Z[\xi]$ rencontre les autres composantes irréductibles de \mathcal{X}_s en des points singuliers de \mathcal{X}_s) et si $\alpha \in k^\times$ est choisi tel que $|\alpha| = |f(\xi)|$, $\alpha^{-1}f$ appartient à la sous- k° -algèbre $\Gamma(Z[\xi]', \mathcal{O}_{\mathcal{X}})$ de $\Gamma(Z[\xi]', \mathcal{O}_{\mathcal{X}}) \otimes_{k^\circ} k$ (proposition 2.1.1) et le sous-schéma fermé $V(\alpha^{-1}f)$ de $\mathcal{X}|_{Z[\xi]'}$ est l'adhérence de $\operatorname{div}(f) \cap \tau_{\mathcal{X}}^{-1}(\xi)$ dans \mathcal{X} ; c'est donc un S -schéma fini et plat, d'où découle l'identité

$$\deg(\operatorname{div}(f) \cap \tau_{\mathcal{X}}^{-1}(\xi)) = \deg(\operatorname{div}(\tilde{f}^\xi) \cap Z[\xi]').$$

Cela garantit la positivité de $\operatorname{dd}^c F$ sur $S(\mathcal{X}) - \partial X$ et établit l'équivalence entre l'inversibilité de f sur $\tau_{\mathcal{X}}^{-1}(S(\mathcal{X}) - \partial X)$ et l'harmonicité de F sur $S(\mathcal{X}) - \partial X$. \square

LEMME 2.2.25. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable connexe dont la fibre spéciale possède un unique point singulier \tilde{x} , $X = \mathcal{X}_\eta$ sa fibre générique et f un élément de $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times$; notons F la restriction à $S(\mathcal{X}) \subset X$ de la fonction $\log |f|$.*

Soient ξ un point dans $S_0(\mathcal{X}) = \partial S(\mathcal{X})$ et $Z[\xi]$ la composante irréductible de \mathcal{X}_s correspondante; étant donné $\alpha \in k^\times$ tel que $|f(\xi)| = |\alpha|$, $\alpha^{-1}f$ est inversible au voisinage de ξ dans \mathcal{X} et induit une fonction méromorphe régulière \tilde{f}^ξ sur $Z[\xi]$, indépendante du choix de α .

La fonction F appartient à $\Lambda_k(\mathcal{X})$ et

$$\lambda_\xi(F) = -\operatorname{ord}_{\tilde{x}}(\tilde{f}^\xi).$$

Démonstration. Quitte à restreindre U , on peut supposer qu'il existe un morphisme étale surjectif $p : \mathcal{X} \rightarrow \mathfrak{S}(a)$, $a \in k^\circ - \{0\}$, induisant un isomorphisme entre $S(\mathcal{X})$ et $S(\mathfrak{S}(a)) = \mathrm{Spf}(k^\circ\{T_0, T_1\}/(T_0T_1 - a))$; on peut également supposer que p^*T_0 est une équation de $Z[\xi]$ dans \mathcal{X} , auquel cas $p^*T_1^{-1}$ est un paramètre local en \tilde{x} sur $Z[\xi]$. L'élément F de $\Lambda_k(\mathcal{X}) = \log |k^\times| \oplus \mathbb{Z} \log |p^*T_1|$ s'écrit

$$F = \log |f|(\xi) + n \log |p^*T_1|$$

et, si $\alpha \in k^\times$ est choisi tel que $|\alpha| = |f(\xi)|$, la section $\alpha^{-1}fp^*T_1^{-n}$ de \mathcal{O}_X^\times est de module constant égal à 1 sur X et appartient donc à $\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{O}_X)^\times$ (proposition 2.1.1). Il en découle en particulier l'appartenance de $\alpha^{-1}f$ à $p^*T_1^n \mathcal{O}_{Z[\xi]}^\times$ et donc, $p^*T_1^{-1}$ définissant un paramètre local en \tilde{x} sur $Z[\xi]$, l'égalité

$$\lambda_\xi(F) = n = -\mathrm{ord}_{\tilde{x}}(\tilde{f}^\xi).$$

□

2.2.5. Morphismes entre S -courbes semi-stables.

Le couple $(S(\mathcal{X}), \tau_{\mathcal{X}})$ associé à une S -courbe simplement semi-stable dépend (en général) du S -schéma formel \mathcal{X} et non pas seulement de l'espace k -analytique \mathcal{X}_η ; la situation est toutefois assez facile à analyser.

PROPOSITION 2.2.26. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable et $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un éclatement admissible tel que \mathcal{Y} soit une S -courbe simplement semi-stable.*

- (i) *L'isomorphisme q_η^{-1} de \mathcal{X}_η sur \mathcal{Y}_η identifie $S(\mathcal{X})$ à un domaine polyédral dans $S(\mathcal{Y})$.*
- (ii) *L'application $S(q) = \tau_{\mathcal{X}} \circ q_{\eta|S(\mathcal{Y})}$ est une rétraction de $S(\mathcal{Y})$ sur $S(\mathcal{X})$ s'insérant dans le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}) \\ q_\eta \downarrow & & \downarrow S(q) \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}). \end{array}$$

- (iii) *Soit V une composante connexe de $S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{X})$; son adhérence \overline{V} dans $S(\mathcal{Y})$ est un polyèdre entier compact dont la frontière $\overline{V} \cap S(\mathcal{X})$ est réduite à un point.*
- (iv) *Quelle que soit la fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{X}))$, $S(q)^*\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}))$ et*

$$\mathrm{dd}^c \Phi = S(q)_*(\mathrm{dd}^c S(q)^*\Phi).$$

Démonstration. Les espaces k -analytiques \mathcal{Y}_η et \mathcal{X}_η sont identifiés via l'isomorphisme q_η .

- (i) Le sous-ensemble $\Sigma = S_0(\mathcal{Y}) \cap S(\mathcal{X})$ de $S(\mathcal{X})$ contient $S_0(\mathcal{X})$ (car q_s est dominant) et est constitué de points x tels que $|\kappa(x)^\times| = |k^\times|$; il existe par conséquent un éclatement admissible $p : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que \mathcal{Z} soit une S -courbe simplement semi-stable, $S(\mathcal{Z}) = S(\mathcal{X})$ et $S_0(\mathcal{Z}) = \Sigma$; la proposition 2.1.15 implique alors la factorisation du morphisme q à travers p :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y} & & \\ u \downarrow & \searrow q & \\ \mathcal{Z} & \xrightarrow{p} & \mathcal{X}, \end{array}$$

u étant un éclatement admissible induisant un isomorphisme au-dessus d'un voisinage ouvert de $\mathrm{Sing}(\mathcal{Z}_s)$ – car aucune composante irréductible de \mathcal{Y}_s ne rencontre $u^{-1}(\mathrm{Sing}(\mathcal{Z}_s))$ – et identifiant \mathcal{Z}_s à son transformé strict dans \mathcal{Y}_s . Il est maintenant évident que $S(\mathcal{X}) = S(\mathcal{Z})$ est un domaine polyédral dans $S(\mathcal{Y})$: ayant choisi, pour tout point $\tilde{y} \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Y}_s)$, un voisinage ouvert connexe $U_{\tilde{y}}$ tel que $U_{\tilde{y}} - \{\tilde{y}\}$ soit lisse, $S(\mathcal{Y})$ est obtenu en recollant à $S_0(\mathcal{Y})$ les polytopes

entiers $S(\mathcal{Y}|_{U_{\tilde{y}}})$, $\tilde{y} \in \text{Sing}(\mathcal{Y}_s)$, tandis que $S(\mathcal{Z})$ est obtenu en recollant à $S_0(\mathcal{Z}) \subset S_0(\mathcal{Y})$ les polytopes entiers $S(\mathcal{Y}|_{U_{\tilde{y}}})$, $\tilde{y} \in \text{Sing}(\mathcal{Z}_s) \subset \text{Sing}(\mathcal{Y}_s)$.

(ii) Soit \mathcal{Z}' le schéma formel induit par \mathcal{Z} sur l'ouvert $\mathcal{Z}'_s = \mathcal{Z}_s - \text{Sing}(\mathcal{Z}_s)$; c'est une S -courbe lisse de squelette $S_0(\mathcal{Z})$ et dont la fibre générique contient $S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{Z})$. L'application $\tau_{\mathcal{X}}$ envoie chacune des composantes connexes de $\mathcal{Z}'_{\eta} \subset \mathcal{X}_{\eta}$ sur le point de $S_0(\mathcal{Z})$ qu'elle contient et elle rétracte le polyèdre $S(\mathcal{Y})$ sur le domaine polyédral $S(\mathcal{Z})$; la commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Y}_{\eta} & \xrightarrow{u_{\eta}} & \mathcal{Z}_{\eta} & \xrightarrow{p_{\eta}} & \mathcal{X}_{\eta} \\ \tau_{\mathcal{Y}} \downarrow & & \tau_{\mathcal{Z}} \downarrow & & \downarrow \tau_{\mathcal{X}} \\ S(\mathcal{Y}) & \xrightarrow{u_{\eta}} & S(\mathcal{Z}) & = & S(\mathcal{X}) \end{array}$$

est évidente.

(iii) Les fibres du morphisme u sont connexes puisqu'il s'agit de l'éclatement d'un idéal (admissible) sur \mathcal{Z} inversible en dehors d'un fermé contenu dans le lieu lisse \mathcal{Z}' . Soit \mathcal{Z}'' la réunion des composantes connexes de \mathcal{Z}'_s qui rencontrent $\text{Sing}(\mathcal{Y}_s)$. Comme on peut le constater sur la description du domaine polyédral $S(\mathcal{Z}) \subset S(\mathcal{Y})$ donnée en (i), l'adhérence de $S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{Z})$ dans $S(\mathcal{Y})$ s'identifie canoniquement au squelette de la S -courbe simplement semi-stable $u^{-1}(\mathcal{Z}'')$, dont les composantes connexes sont en bijection avec l'ensemble des points génériques de \mathcal{Z}''_s ; il en découle que chaque composante connexe de $S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{Z})$ est adhérente à un et un seul point dans $S_0(\mathcal{Z}'') \subset S_0(\mathcal{Z})$, qui n'est autre que son image par la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$.

(iv) Quels que soient le point $x \in S(\mathcal{X})$ et l'élément $t \in T_x S(\mathcal{Y})$, correspondant à un germe de composante connexe c de $S(\mathcal{Y})$ en x ,

$$\lambda_{x,t}(\Phi) = \begin{cases} 0 & \text{si } c \text{ est contenue dans } S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{X}); \\ \lambda_{x,t}(\Phi) & \text{si } c \text{ est contenue dans } S(\mathcal{X}); \end{cases}$$

l'égalité

$$\text{dd}^c \Phi = S(q)_*(\text{dd}^c S(q)^* \Phi)$$

en découle immédiatement. \square

PROPOSITION 2.2.27. — Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux S -courbes simplement semi-stables et $f : \mathcal{X}_{\eta} \rightarrow \mathcal{Y}_{\eta}$ un morphisme quasi-fini. Il existe une extension finie séparable k'/k et un éclatement admissible $q : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X} \times_S S'$, $S' = \text{Spf}(k'^{\circ})$, tels que

(i) \mathcal{X}' soit une S -courbe simplement semi-stable et le morphisme $f' = f \otimes 1 : \mathcal{X}_{\eta} \otimes_k k' \rightarrow \mathcal{Y}_{\eta} \otimes_k k'$ se prolonge en un $\text{Spf}(S')$ -morphisme $f' : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}'$, où $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \times_S \text{Spf}(S')$

(ii) l'application $S(f') = \tau_{\mathcal{Y}'} \circ f|_{S(\mathcal{X}')} : S(\mathcal{X}') \rightarrow S(\mathcal{Y}')$ soit un morphisme de polyèdres entiers,

(iii) le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}'_{\eta} & \xrightarrow{\tau'_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}') \\ f \downarrow & & \downarrow S(f') \\ \mathcal{Y}'_{\eta} & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}'}} & S(\mathcal{Y}') \end{array}$$

soit commutatif.

Dans ces conditions :

(iv) pour tout point $x \in S(\mathcal{X}') - \partial\mathcal{X}'_\eta$ et toute fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}'))$,

$$\int_{\{x\}} \mathrm{dd}^c S(f')^* \Phi = (\deg_x f') \int_{\{f'(x)\}} \mathrm{dd}^c \Phi.$$

Démonstration.

(i) Tous les points du sous-ensemble $\Sigma = f^{-1}(S_0(\mathcal{Y}))$ de \mathcal{X}_η sont de type (2) (car f est quasi-fini) et, par application du lemme 2.2.22, il existe une extension finie k'/k et un éclatement admissible $q : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X} \times_S S'$, avec $S' = \mathrm{Spf}(k'^\circ)$, tels que \mathcal{X}' soit une S -courbe simplement semi-stable et $p_{k'}^{-1}(\Sigma) \subset S_0(\mathcal{X}')$. Sous ces conditions, la proposition 2.1.15 montre que le morphisme $f' = f \otimes 1 : \mathcal{X}'_\eta = \mathcal{X}_\eta \otimes_k k' \rightarrow \mathcal{Y}_\eta \otimes_k k'$ se prolonge en un S' -morphisme $\underline{f} : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \times_S S'$.

Nous notons dorénavant \mathcal{X} , \mathcal{Y} , f et \underline{f} en lieu et place de \mathcal{X}' , \mathcal{Y}' , f' et \underline{f}' respectivement.

(ii) Considérons deux points $x \in \mathrm{Sing}(\mathcal{X}_s)$, $y \in \mathrm{Sing}(\mathcal{Y}_s)$ tels que $\underline{f}(x) = y$ et soient $U \subset \mathcal{X}_s$, $V \subset \mathcal{Y}_s$ des voisinages ouverts affines connexes de x , y respectivement tels que $U - \{x\}$ et $V - \{y\}$ soient lisses. Par construction des polyèdres entiers $S(\mathcal{X})$ et $S(\mathcal{Y})$,

$$S(\mathcal{X}) \cap (\mathcal{X}|_U)_\eta = S(\mathcal{X}|_U) \quad \text{et} \quad S(\mathcal{Y}) \cap (\mathcal{Y}|_V)_\eta = S(\mathcal{Y}|_V)$$

sont des polytopes entiers, de groupes structuraux $\Lambda(\mathcal{X}|_U)$ et $\Lambda(\mathcal{Y}|_V)$ respectivement. Il nous faut nous assurer que, pour toute fonction $\varphi \in \Lambda(\mathcal{Y}|_V)$, la fonction $S(f)^*\varphi$ sur $S(\mathcal{X}|_U)$ appartient à $\Lambda(\mathcal{X}|_U)$; ceci est contenu dans la formule

$$S(f)^*\varphi = \Lambda(\underline{f})(\varphi),$$

où $\Lambda(\underline{f})$ est l'homomorphisme de $\Lambda(\mathcal{Y}|_V)$ dans $\Lambda(\mathcal{X}|_U)$ induit par le morphisme $\underline{f} : \mathcal{X}|_U \rightarrow \mathcal{Y}|_V$ (2.1.1). La vérification en est facile :

- il n'y a rien à dire si φ est constante ;
- si la fonction φ appartient au sous-groupe $\Lambda_k(\mathcal{Y}|_V)$ de $\Lambda(\mathcal{Y}|_V)$, elle est de la forme $-\log |u|$, $u \in (\Gamma(\mathcal{Y}|_V, \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}) \otimes_{k^\circ} k)^\times$, et alors

$$\begin{aligned} S(f)^*\varphi &= (f^* \tau_{\mathcal{Y}}^* \varphi)_{|S(\mathcal{X})} = (f^* \log |u|)_{|S(\mathcal{X})} \\ &= \log |f^* u|_{|S(\mathcal{X})} \\ &= \Lambda(\underline{f})(\varphi). \end{aligned}$$

(iii) L'application $S(f) : S(\mathcal{X}) \rightarrow S(\mathcal{Y})$ étant par définition la composée $\tau_{\mathcal{Y}} \circ f_{|S(\mathcal{X})}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ f \downarrow & & \downarrow S(f) \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}) \end{array}$$

est commutatif si et seulement si l'application $\tau_{\mathcal{Y}} \circ f$ est constante sur les fibres de la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$.

- Soit Ω l'ouvert $\mathcal{Y}_s - \mathrm{Sing}(\mathcal{Y}_s)$; la rétraction $\tau_{\mathcal{Y}}$ étant localement constante sur $(\mathcal{Y}|_\Omega)_\eta$ et à valeurs dans $S_0(\mathcal{Y})$, $\tau_{\mathcal{Y}} \circ f$ est constantes sur les fibres de $\tau_{\mathcal{Y}}$ au-dessus de $S(\mathcal{Y}|_{\underline{f}^{-1}(\Omega)})$ puisque ces dernières sont connexes.

- Soient y un point dans $\text{Sing}(\mathcal{Y}_s)$ et V un voisinage affine connexe de y dans \mathcal{Y}_s tel que $V - \{y\}$ soit lisse. Étant donnée une fonction $\varphi \in \Lambda(\mathcal{Y}|_V)$, la fonction $f^*\varphi = \Lambda(f)(\varphi)$ appartient à $\Lambda(\mathcal{X}|_{\underline{f}^{-1}(V)})$; elle est donc constante sur les fibres de $\tau_{\mathcal{X}}$. Comme

$$f^*\varphi = (\tau_{\mathcal{Y}} \circ f)^*\varphi|_{S(\mathcal{Y})}$$

et que les éléments de $\Lambda(\mathcal{Y}|_V)$ séparent les points de $S(\mathcal{Y}|_V)$, cela établit que l'application $\tau_{\mathcal{Y}} \circ f$ est constante sur les fibres de $\tau_{\mathcal{X}}$ au-dessus de $S(\mathcal{X}|_{\underline{f}^{-1}(V)})$.

(iv) Traitons tout d'abord le cas d'un point $x \in S(\mathcal{X})$ appartenant à $S_0(\mathcal{X})$.

Quitte à effectuer un éclatement admissible sur \mathcal{Y} , on peut supposer que le point y appartient à $S_0(\mathcal{Y})$. Notons C_x (resp. C_y) la composante irréductible de \mathcal{X}_s (resp. \mathcal{Y}_s) de point générique $r_{\mathcal{X}}(x)$ (resp. $r_{\mathcal{Y}}(y)$).

Le morphisme $\underline{f}_s : \mathcal{X}_s \rightarrow \mathcal{Y}_s$ induit un morphisme quasi-fini et dominant de C_x dans C_y et l'homomorphisme correspondant $\kappa(r_{\mathcal{Y}}(y)) \rightarrow \kappa(r_{\mathcal{X}}(x))$ entre les corps de fonctions coïncide avec celui provenant de l'homomorphisme $\mathcal{H}(y) \rightarrow \mathcal{H}(x)$, défini par f , via les identifications canoniques

$$\widetilde{\mathcal{H}(x)} = \kappa(r_{\mathcal{X}}(x)), \quad \widetilde{\mathcal{H}(y)} = \kappa(r_{\mathcal{Y}}(y))$$

(proposition 2.1.2, (iii)). L'hypothèse $x \notin \partial\mathcal{X}_{\eta}$ est équivalente à la propriété de la \tilde{k} -courbe algébrique C_x ; il en est alors de même pour la courbe C_y et le morphisme induit par \underline{f}_s de C_x dans C_y est *fini*, de degré

$$[\widetilde{\mathcal{H}(x)} : \widetilde{\mathcal{H}(y)}] = [\mathcal{H}(x) : \mathcal{H}(y)] = \deg_x f$$

(l'extension $\mathcal{H}(x)/\mathcal{H}(y)$ est non ramifiée puisque, les S -courbes \mathcal{X}, \mathcal{Y} étant simplement semi-stables, $|\mathcal{H}(y)^{\times}| = |k^{\times}| = |\mathcal{H}(x)^{\times}|$).

Soit p un point singulier de \mathcal{Y}_s appartenant à C_y ; à p correspond un sous-polytope entier P de $S(\mathcal{Y})$ tel que $y \in \partial P$ et on note t la fonction affine positive sur P qui s'annule en x et engendre le groupe abélien $\Lambda(P)/\mathbb{R}$. Notons $e_{p'}(f)$ l'indice de ramification de \underline{f} en un point fermé p' de C_x .

Nous avons d'une part

$$e_{p'}(\underline{f}) = 1$$

pour tout point fermé $\xi' \in C_x \cap (\mathcal{X}_s - \text{Sing}(\mathcal{X}_s))$: il passe en effet nécessairement deux composantes irréductibles distinctes de \mathcal{X}_s par tout point de C_x au-dessus d'un point de $C_y \cap \text{Sing}(\mathcal{Y}_s)$.

D'autre part, la définition de la structure entière sur $S(\mathcal{X})$ est telle que

$$\lambda_{x,p'}(S(f)^*t) = e_{p'}(\underline{f})$$

pour tout point $p' \in C_x \cap \text{Sing}(\mathcal{X}_s)$.

Nous en déduisons :

$$\begin{aligned} \int_{\{x\}} \text{dd}^c S(f)^*t &= \sum_{p' \in C_x \cap \text{Sing}(\mathcal{X}_s)} \lambda_{x,p'}(S(f)^*t) [\kappa(p') : \tilde{k}] \\ &= \sum_{p' \in C_x \cap \text{Sing}(\mathcal{X}_s)} e_{p'}(\underline{f}) [\kappa(p') : \kappa(p)] [\kappa(\xi) : \tilde{k}] \\ &= (\deg(\underline{f}|_{C_x})) [\kappa(p) : \tilde{k}] \\ &= (\deg_x f) \int_{\{y\}} \text{dd}^c t \end{aligned}$$

et l'égalité

$$\int_{\{x\}} \mathrm{dd}^c S(f)^* \Phi = (\deg_x f) \int_{\{f(x)\}} \mathrm{dd}^c \Phi$$

pour toute fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}))$ s'en déduit immédiatement par linéarité.

Le cas général se déduit du précédent en appliquant la proposition 2.2.21 et le lemme 2.2.22.

□

2.3. Fonctions harmoniques

2.3.1. L'espace $H(\mathcal{X})$.

Étant donnée une S -courbe \mathcal{X} , le bord de l'espace k -analytique \mathcal{X}_η (2.1.2) est le sous-ensemble $\partial\mathcal{X}_\eta$ de $S_0(\mathcal{X})$ formé des points au-dessus des points génériques des composantes irréductibles affines de \mathcal{X}_s .

DÉFINITION 2.3.1. — *Soit \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable ; le sous-espace vectoriel*

$$\tau_{\mathcal{X}}^* H(S(\mathcal{X}), \partial\mathcal{X}_\eta)$$

de $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ est noté $H(\mathcal{X})$.

Nous nous restreindrons, dans ce qui suit, à la considération de S -courbes simplement semi-stables \mathcal{X} qui sont *quasi-compactes* ; cette hypothèse équivaut à la compacité de l'espace topologique $|\mathcal{X}_\eta|$.

PROPOSITION 2.3.2

(i) *Lorsque la k -courbe \mathcal{X}_s est propre, $H(\mathcal{X})$ est l'espace des fonctions réelles localement constantes sur \mathcal{X}_η .*

(ii) *Lorsque $\partial\mathcal{X}_\eta$ rencontre chaque composante connexe de $|\mathcal{X}_\eta|$, l'application de restriction*

$$H(\mathcal{X}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\partial\mathcal{X}_\eta, \mathbb{R})$$

est bijective.

Démonstration.

(i) Si la k -courbe \mathcal{X}_s est propre, l'ensemble $\partial\mathcal{X}_\eta$ est vide ; l'assertion découle donc du corollaire 1.2.11.

(ii) Si l'ensemble $\partial\mathcal{X}_\eta$ rencontre chacune des composantes connexes de $|\mathcal{X}_\eta|$, il rencontre également chaque composante connexe de $S(\mathcal{X})$ (remarque 2.2.19,3) et l'assertion découle de la proposition 1.2.15. □

Comme annoncé en introduction de ce chapitre, nous allons établir le résultat suivant.

PROPOSITION 2.3.3. — *Soient $\mathcal{X}, \mathcal{X}'$ deux S -courbes simplement semi-stables et $f : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ un morphisme quasi-fini. L'application \mathbb{R} -linéaire $f^* : C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(|\mathcal{X}'_\eta|, \mathbb{R})$ envoie le sous-espace $H(\mathcal{X})$ dans le sous-espace $H(\mathcal{X}')$.*

Démonstration. Vu la proposition 2.2.26, le résultat s'obtient en combinant les trois lemmes suivants. □

LEMME 2.3.4. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable et $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ un éclatement admissible tel que \mathcal{Y} soit une S -courbe simplement semi-stable ; l'isomorphisme $q_\eta^* : C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \xrightarrow{\sim} C^0(|\mathcal{Y}_\eta|, \mathbb{R})$ identifie les sous-espaces $H(\mathcal{X})$ et $H(\mathcal{Y})$.*

Démonstration. L'isomorphisme q_η identifie $\partial\mathcal{Y}_\eta$ et $\partial\mathcal{X}_\eta$.

D'après la proposition 2.2.26, le polyèdre entier $S(\mathcal{X})$ s'identifie à un domaine polyédral dans le polyèdre entier $S(\mathcal{Y})$ tel que, posant $S(q) = \tau_{\mathcal{X}} \circ q_{\eta|S(\mathcal{Y})}$, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}) \\ q_\eta \downarrow & & \downarrow S(q) \\ \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \end{array}$$

soit commutatif, chaque composante connexe de $\overline{S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{X})}$ ne rencontre $S(\mathcal{X})$ qu'en un seul point et l'application $S(q)$ soit la rétraction envoyant chacune de ces composantes sur le point correspondant de $S(\mathcal{X})$.

Les espaces k -analytiques \mathcal{Y}_η et \mathcal{X}_η sont identifiés via l'isomorphisme q_η ; on déduit du diagramme commutatif précédent que, pour toute fonction F sur $S(\mathcal{X})$, la fonction $f = F \circ \tau_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X}_\eta = \mathcal{Y}_\eta$ se factorise par $\tau_{\mathcal{X}}$ sous la forme :

$$f = (F \circ S(q)) \circ \tau_{\mathcal{Y}}.$$

L'application linéaire

$$S(q)^* : A^0(S(\mathcal{X})) \rightarrow A^0(S(\mathcal{Y}))$$

induisant un isomorphisme de $H(S(\mathcal{X}), \partial\mathcal{X}_\eta)$ sur $H(S(\mathcal{Y}), \partial\mathcal{Y}_\eta)$ (proposition 1.2.20), il en résulte que l'isomorphisme canonique de $C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ sur $C^0(|\mathcal{Y}_\eta|, \mathbb{R})$ envoie le sous-espace $H(\mathcal{X})$ dans $H(\mathcal{Y})$ et induit un isomorphisme de l'un sur l'autre. \square

LEMME 2.3.5. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable (quasi-compacte) et K/k une extension non-archimédienne; une fonction $h \in C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ appartient au sous-espace $H(\mathcal{X})$ si et seulement si la fonction $p_K^* h$ appartient au sous-espace $H(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$.*

Démonstration. Le morphisme canonique $p_K : \mathcal{X}_\eta \hat{\otimes}_k K \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ induit un isomorphisme G -local surjectif $S(\mathcal{X})_K \rightarrow S(\mathcal{X})$ de polyèdres entiers pondérés (proposition 2.2.21) et, les composantes irréductibles affines de la \tilde{K} -courbe $\mathcal{X}_s \otimes_{\tilde{k}} \tilde{K}$ étant les images réciproques des composantes irréductibles affines de \mathcal{X}_s , $\partial(\mathcal{X}_\eta \hat{\otimes}_k K) = p_K^{-1}(\partial\mathcal{X}_\eta) \cap S_0(\mathcal{X} \times_S \mathrm{Spf}(K^\circ))$. Ceci implique, pour tout fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{X}))$, que la fonction $p_K^* \Phi$ appartient à $A^0(S(\mathcal{X})_K)$ et que le support de la mesure $\mathrm{dd}^c \Phi = (p_K)_* \mathrm{dd}^c p_K^* \Phi$ est contenu dans $\partial\mathcal{X}_\eta$ si et seulement si celui de la mesure $\mathrm{dd}^c p_K^* \Phi$ est contenu dans $\partial(\mathcal{X}_\eta \hat{\otimes}_k K)$. \square

LEMME 2.3.6. — *Soient \mathcal{X}, \mathcal{Y} deux S -courbes simplement semi-stables et $f : \mathcal{Y}_\eta \rightarrow \mathcal{X}_\eta$ un morphisme quasi-fini; l'homomorphisme $f^* : C^0(|\mathcal{Y}_\eta|, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R})$ envoie le sous-espace $H(\mathcal{Y})$ dans $H(\mathcal{X})$.*

Démonstration. Appliquant la proposition 2.2.27 et les deux lemmes précédents, on peut supposer que f induit un morphisme de \mathcal{Y} dans \mathcal{X} . On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{X}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{X}}} & S(\mathcal{X}) \\ f \downarrow & & \downarrow S(f) \\ \mathcal{Y}_\eta & \xrightarrow{\tau_{\mathcal{Y}}} & S(\mathcal{Y}), \end{array}$$

où $S(f) = \tau_{\mathcal{Y}} \circ f$ est un morphisme de polyèdres entiers.

Étant donnée une fonction H dans $H(S(\mathcal{Y}), \partial\mathcal{Y}_\eta)$,

$$f^*(H \circ \tau_{\mathcal{Y}}) = S(f)^* H \circ \tau_{\mathcal{X}}$$

et $S(f)^*H \in A^0(S(\mathcal{X}))$. Il reste à vérifier que la fonction $S(f)^*H$ est harmonique sur $S(\mathcal{X}) - \partial\mathcal{X}_\eta$. C'est une conséquence directe du point (iv) de la proposition 2.2.27 : $f(x) \notin \partial\mathcal{Y}_\eta$ pour tout point $x \in S(\mathcal{X}) - \partial\mathcal{X}_\eta$ et

$$\int_{\{x\}} dd^c S(f)^*H = (\deg_x f) \int_{\{f(x)\}} dd^c H = 0.$$

□

Si X est un espace strictement k -affinoïde et $\varphi : X \xrightarrow{\sim} \mathcal{X}_\eta$ est un isomorphisme de X sur la fibre générique d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} , le sous-espace vectoriel réel $\varphi^*H(\mathcal{X})$ de $C^0(|X|, \mathbb{R})$ ne dépend pas du choix de \mathcal{X} et de φ ; il est noté $H(X)$.

De manière générale, étant donnés un espace k -analytique X et une clôture algébrique k^a de k , le groupe de Galois G de la fermeture séparable k^{sep} de k dans k^a opère par automorphismes sur l'espace $\widehat{k^a}$ -analytique $X \widehat{\otimes}_k k^a$. On dispose d'un morphisme G -équivariant canonique

$$p : X \widehat{\otimes}_k k^a \rightarrow X$$

d'espaces analytiques et l'application continue sous-jacente est un quotient de $|X \widehat{\otimes}_k k^a|$ par l'action de G dans la catégorie des espaces topologiques : c'est en effet un quotient dans la catégorie des ensembles d'après le corollaire 1.3.6 de [3] et l'application continue p est ouverte.

PROPOSITION 2.3.7. — *Quelles que soient la S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} et l'extension finie galoisienne k'/k , l'action du groupe $G = \text{Gal}(k'/k)$ sur $C^0(|\mathcal{X}_\eta \otimes_k k'|, \mathbb{R})$ stabilise le sous-espace $H(\mathcal{X}_\eta)$ et l'isomorphisme canonique*

$$C^0(|\mathcal{X}_\eta|, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(|\mathcal{X}_\eta \otimes_k k'|, \mathbb{R})^G$$

induit un isomorphisme de $H(\mathcal{X}_\eta)$ sur $H(\mathcal{X}_\eta \otimes_k k')^G$.

Démonstration. On peut supposer \mathcal{X}_η connexe.

Si \mathcal{X}_η est propre, $H(\mathcal{X}_\eta)$ (resp. $H(\mathcal{X}_\eta \otimes_k k')$) est l'espace des fonctions constantes sur \mathcal{X}_η (resp. localement constantes sur $\mathcal{X}_\eta \otimes_k k'$) (proposition 2.3.2, 1) et l'assertion est évidente.

Si \mathcal{X}_η n'est pas propre, alors il en est de même pour chaque composante connexe de $\mathcal{X}_\eta \otimes_k k'$ et, d'après la proposition 2.3.2,2, les restrictions

$$H(\mathcal{X}_\eta) \rightarrow \text{Hom}(\partial\mathcal{X}_\eta, \mathbb{R})$$

et

$$H(\mathcal{X}_\eta \otimes_k k') \rightarrow \text{Hom}(\partial(\mathcal{X}_\eta \otimes_k k'), \mathbb{R})$$

sont bijectives. L'assertion résulte ainsi de l'identité $\partial\mathcal{X}_\eta = \partial(\mathcal{X}_\eta \otimes_k k')^G$. □

2.3.2. Le théorème de réduction semi-stable.

C'est ici qu'intervient le théorème de réduction semi-stable.

THÉORÈME 2.3.8. — *Soit X un espace strictement k -affinoïde purement de dimension 1 et rig-lisse ; il existe une extension finie séparable k' de k telle que le domaine k' -affinoïde $X \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\text{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable.*

Démonstration. Il existe une extension finie séparable k_1 de k et une courbe algébrique C propre et lisse sur k_1 telles que $X \otimes_k k_1$ soit isomorphe à un domaine affinoïde de C ([31], theorem 1). Appliquant le théorème de réduction semi-stable sous la forme rigide-analytique établie par S. Bosch et W. Lütkebohmert dans [9], il existe une extension finie séparable k' de k_1 telle que $C \otimes_{k_1} k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\text{Spf}(k'^\circ)$ -courbe \mathcal{C} dont la fibre spéciale est simplement semi-stable ; c'est automatiquement une S -courbe semi-stable

(remarque 2.2.9, 3). En choisissant convenablement k' , on peut en outre supposer que tout point x du bord de $X \otimes_k k'$ satisfait à la condition $|\kappa(x)^\times| = |k'^\times|$.

Envisageons $X' = X \otimes_k k'$ comme un domaine strictement k' -affinoïde de \mathcal{C}_η et soit $q : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ un éclatement admissible tel que \mathcal{C}' soit une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable, avec $\partial X' \subset S_0(\mathcal{C}')$ (lemme 2.2.22). L'image de X' par l'application de réduction $\mathcal{C}'_\eta \rightarrow \mathcal{C}_s$ est un ouvert U et X' est isomorphe à la fibre générique de la $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable $\mathcal{X} = \mathcal{C}'|_U$. \square

Soient X un espace strictement k -affinoïde purement de dimension 1 rig-lisse et k', k'' deux extensions finies galoisiennes de k telles que $X \otimes_k k'$ et $X \otimes_k k''$ soient isomorphes aux fibres génériques de courbes strictement semi-stables ; étant donnée une extension finie galoisienne K de k coiffant k' et k'' , la proposition 2.3.7 implique l'identité des espaces $H(X \otimes_k k')$ et $H(X \otimes_k K)^{\mathrm{Gal}(K/k')}$ (resp. $H(X \otimes_k k'')$ et $H(X \otimes_k K)^{\mathrm{Gal}(K/k'')}$), d'où découle l'égalité

$$H(X \otimes_k k')^{\mathrm{Gal}(k'/k)} = H(X \otimes_k K)^{\mathrm{Gal}(K/k)} = H(X \otimes_k k'')^{\mathrm{Gal}(k''/k)}.$$

Le théorème précédent permet ainsi de définir, pour tout espace strictement k -affinoïde X purement de dimension 1 et rig-lisse, un sous-espace vectoriel $H(X)$ de $C^0(|X|, \mathbb{R}) : H(X) = H(X \otimes_k k')^{\mathrm{Gal}(k'/k)} \subset C^0(|X|, \mathbb{R})$, k' étant une extension finie galoisienne de k telle que $X \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable.

Désignant par \mathbf{C} la catégorie dont les objets sont les espaces strictement k -affinoïdes, purement de dimension 1 et rig-lisses, et les morphismes les immersions affinoïdes, il découle de la proposition 2.3.3 que l'on vient ainsi de définir un foncteur H sur \mathbf{C}^{op} à valeurs dans $\mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$.

Nous aurons besoin des deux résultats suivants.

LEMME 2.3.9. — *Pour tout espace strictement k -affinoïde Y rig-lisse et purement de dimension 1, l'application de restriction*

$$C^0(|Y|, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$$

induit un isomorphisme du sous-espace $H(Y)$ sur $\mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$.

Démonstration. Soit k' une extension galoisienne finie de k telle que l'espace strictement k' -affinoïde $Y \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} . La projection canonique $p : Y \otimes_k k' \rightarrow Y$ induit une bijection de $\Gamma(Y \otimes_k k')^{\mathrm{Gal}(k'/k)}$ sur $\Gamma(Y)$ et l'application de restriction

$$C^0(|Y|, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$$

coïncide avec l'application induite par la restriction

$$C^0(|Y \otimes_k k'|, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(Y \otimes_k k'), \mathbb{R})$$

entre les sous-espaces des invariants sous $\mathrm{Gal}(k'/k)$; puisque $H(Y) = H(Y \otimes_k k')^{\mathrm{Gal}(k'/k)}$, la conclusion découle de la proposition 2.3.2. \square

LEMME 2.3.10. — *Soient Y un espace strictement k -affinoïde connexe, de dimension 1 et rig-lisse, et (h_n) une suite croissante de fonctions appartenant à $H(Y)$. L'alternative suivante est vraie :*

- soit la suite (h_n) converge, uniformément sur Y , vers une fonction $h \in H(Y)$,
- soit la suite (h_n) converge, localement uniformément sur $Y - \Gamma(Y)$, vers ∞ .

Démonstration. Soient k' une extension finie galoisienne de k telle que $Y' = Y \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement nodale \mathfrak{Y}' et $p : Y' \rightarrow Y$ la projection canonique. Si l'assertion est démontrée pour la suite $(p^* h_n)$ dans $H(Y')$, elle l'est également pour la suite (h_n) : en effet, puisque $H(Y) = H(Y')^{\mathrm{Gal}(k'/k)}$, il suffit de s'assurer

que la fonction limite $h \in H(Y')$ du premier cas de l'alternative est invariante sous $\text{Gal}(k'/k)$; utilisant l'isomorphisme $\text{Gal}(k'/k)$ -équivariant de restriction

$$H(Y') \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(Y'), \mathbb{R}),$$

cela découle de l'identité entre $\Gamma(Y)$ et $\Gamma(Y')^{\text{Gal}(k'/k)}$.

Vu la définition de l'espace $H(Y') = H(\mathcal{Y}')$ (définition 2.3.1), le résultat pour une suite croissante dans $H(Y')$ s'obtient par application de la proposition 1.2.12. \square

2.3.3. Le faisceau \mathcal{H}_X .

Soit X une courbe strictement k -analytique lisse. Le foncteur $H : \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ donne naturellement naissance à un préfaisceau H_X sur le site rigide X_R de X (2.1.1) : étant donné un objet V de X_R , les domaines strictement k -affinoïdes de X contenus dans V forment un système inductif filtrant $I(V)$ (les morphismes sont les inclusions) et l'on pose

$$H_X(V) = \varinjlim_{I(V)} H.$$

Remarque 2.3.11

1. Pour tout domaine strictement k -affinoïde Y dans X , l'homomorphisme canonique $H_X(Y) \rightarrow H(Y)$ est un isomorphisme.
2. Le préfaisceau H_X sur le site X_R n'est clairement *pas* un faisceau. Il suffit en effet de considérer, sur $X = \mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \cup \{\infty\}$, le recouvrement fini par les domaines strictement k -affinoïdes $Y_1 = \{|T_1| \leq r\}$, $Y_2 = \{r \leq |T_1| \leq r^{-1}\}$ et $Y_3 = \{|T_1| \geq r^{-1}\}$ – r étant un élément de $]0, 1[\cap |k^\times|$ – et la fonction continue h sur X telle que
 - $h|_{Y_1} = 0$;
 - $h|_{Y_2} = \log |T_1| - \log(r)$;
 - $h|_{Y_3} = -2\log(r)$.

Chacune des fonctions $h|_{Y_i}$ appartient à $H(Y_i)$, $i \in \{1, 2, 3\}$, mais la fonction h n'appartient certainement pas à $H_X(X)$: si tel était en effet le cas, la restriction de h au domaine strictement k -affinoïde $Y = \{|T_1| \leq r^{-1}\}$ de X devrait appartenir à $H(Y)$, donc, en vertu de la proposition 2.3.2, 1, être constante puisque $\Gamma(Y)$ est réduit à un point (associé à la semi-norme

$$k[T_1] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad \sum_{n \geq 0} a_n T_1^n \mapsto \max_{n \geq 0} (|a_n| r^{-n}).$$

Nous nous intéresserons au faisceau associé à ce préfaisceau dans le prochain chapitre (cf. 3.2.1).

Tout ouvert Ω de X admet un recouvrement localement fini par des domaines strictement k -affinoïdes : c'est donc un objet de X_R et tout recouvrement ouvert de Ω est une famille couvrante dans X_R . Notant $|X|$ le site associé à l'espace topologique $|X|$, la remarque précédente montre que l'on dispose d'un morphisme de sites canonique $\iota : X_R \rightarrow |X|$. À tout préfaisceau (resp. faisceau) \mathcal{F} sur X_R est donc associé le préfaisceau (resp. faisceau) $\iota_* \mathcal{F}$ sur l'espace topologique $|X|$.

DÉFINITION 2.3.12. — *Étant donnée une courbe simplement k -analytique lisse X , le préfaisceau $\iota_* H_X$ sur l'espace topologique $|X|$ sous-jacent à X se note \mathcal{H}_X .*

Le préfaisceau $Y \mapsto C^0(Y, \mathbb{R})$ sur le site X_R étant un faisceau (remarque 2.1.7), \mathcal{H}_X est un sous-préfaisceau du faisceau \mathcal{C}_X des germes de fonctions réelles (continues) sur $|X|$. Les éléments de $\mathcal{H}_X(X)$ sont les fonctions (réelles) continues sur $|X|$ dont la restriction à tout domaine strictement k -affinoïde Y de X appartient au sous-espace $H(Y)$ de $C^0(|Y|, \mathbb{R})$.

Soit X une courbe strictement k -analytique lisse et désignons momentanément par $\underline{\mathcal{H}}_X$ le faisceau sur $|X|$ associé au préfaisceau \mathcal{H}_X ; nous allons maintenant vérifier l'identité $\mathcal{H}_X = \underline{\mathcal{H}}_X$, établissant ainsi que \mathcal{H}_X est un faisceau.

PROPOSITION 2.3.13. — *Les sections du faisceau $\underline{\mathcal{H}}_X$ satisfont au principe du maximum : quel que soit l'ouvert Ω de X , une fonction $h \in \Gamma(\Omega, \underline{\mathcal{H}}_X)$ admet un extremum local en un point x de Ω si et seulement si elle est constante au voisinage de x .*

Démonstration. Il existe par hypothèse un voisinage strictement k -affinoïde Y de x tel que $h|_Y \in H(Y)$. Soit k' une extension finie galoisienne de k telle que $Y \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} ; $h \otimes 1 = H \circ \tau_{\mathcal{Y}}$ avec $H \in H(S(\mathcal{Y}), \Gamma(\mathfrak{Y}_\eta))$ et, le morphisme canonique d'espaces analytiques $p : Y \otimes_k k' \rightarrow Y$ étant ouvert, il suffit de vérifier que $h \otimes 1$ est localement constante en un point y de $p^{-1}(x)$. Si $y \notin S(\mathcal{Y})$, $h \otimes 1$ est localement constante au voisinage de y ; sinon, H a un extremum local sur $S(\mathcal{Y}) - \Gamma(\mathfrak{Y}_\eta)$ en y , donc est localement constante en ce point en vertu du principe du maximum sur les polyèdres entiers (proposition 1.2.9) et il en va de même de $h \otimes 1$ par continuité de $\tau_{\mathcal{Y}}$. \square

Soit Y un domaine strictement k -affinoïde dans X ; vu la définition du préfaisceau \mathcal{H}_X , on dispose d'une application \mathbb{R} -linéaire canonique de restriction $H(Y) \rightarrow \mathcal{H}_X(Y - \partial Y)$ (induite par les restrictions $H(Y) \rightarrow H(Y')$, Y' parcourant l'ensemble des domaines strictement k -affinoïdes de $Y - \partial Y$) et donc d'une application \mathbb{R} -linéaire canonique

$$\rho : H(Y) \rightarrow \Gamma(Y - \partial Y, \underline{\mathcal{H}}_X) \cap C^0(Y, \mathbb{R}).$$

COROLLAIRE 2.3.14. — *L'application linéaire canonique*

$$\rho : H(Y) \rightarrow \Gamma(Y - \partial Y, \underline{\mathcal{H}}_X) \cap C^0(Y, \mathbb{R})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H(Y) & \xrightarrow{\quad} & \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R}) \\ \rho \downarrow & & \parallel \\ \Gamma(Y - \partial Y, \underline{\mathcal{H}}_X) \cap C^0(Y, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R}), \end{array}$$

dans lequel les flèches horizontales sont les restrictions ; la proposition précédente implique l'injectivité de l'application de restriction

$$\Gamma(Y - \partial Y, \underline{\mathcal{H}}_X) \cap C^0(Y, \mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{Hom}(\partial Y, \mathbb{R}) = \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$$

et donc la bijectivité de ρ puisque l'application $H(Y) \rightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$ est un isomorphisme (proposition 2.3.2). \square

COROLLAIRE 2.3.15. — *Pour toute courbe strictement k -analytique lisse X , l'homomorphisme canonique de préfaisceaux $\mathcal{H}_X \rightarrow \underline{\mathcal{H}}_X$ est un isomorphisme ; \mathcal{H}_X est donc un faisceau.*

Démonstration. Le sous-préfaisceau \mathcal{H}_X du faisceau \mathcal{C}_X est séparé et l'homomorphisme canonique $\mathcal{H}_X \rightarrow \underline{\mathcal{H}}_X$ est donc injectif. Sa surjectivité équivaut à l'assertion suivante : pour tout ouvert U de X et tout domaine strictement k -affinoïde Y de U , la restriction à Y d'une fonction $h \in \Gamma(U, \mathcal{H}_X)$ appartient au sous-espace $H(Y)$ de $C^0(|Y|, \mathbb{R})$; c'est une conséquence immédiate du corollaire précédent. \square

DÉFINITION 2.3.16. — *Le faisceau \mathcal{H}_X sur une courbe strictement k -analytique lisse X est appelé le faisceau des germes de fonctions harmoniques.*

Remarque 2.3.17. — La définition du faisceau \mathcal{H}_X rend évidente les assertions suivantes :

- le faisceau \mathcal{H}_X sur l'espace topologique $|X|$ est invariant par les automorphismes k -analytiques de X ; plus généralement, si X et Y sont deux courbes strictement k -analytiques lisses et $\varphi : X \xrightarrow{\sim} Y$ est un k -isomorphisme, l'isomorphisme de faisceaux $\varphi^\# : \mathcal{C}_Y \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_X$ induit un isomorphisme de \mathcal{H}_Y sur \mathcal{H}_X ;
- pour toute extension finie galoisienne k' de k , l'opération de $G = \text{Gal}(k'/k)$ sur $\mathcal{C}_{X \otimes_k k'}$ stabilise la sous-faisceau $\mathcal{H}_{X \otimes_k k'}$ et l'isomorphisme canonique $\mathcal{C}_X \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}_{X \otimes_k k'}^G$ induit un isomorphisme de \mathcal{H}_X sur $\mathcal{H}_{X \otimes_k k'}^G$.

Étant donné un domaine k -affinoïde Y d'une courbe k -analytique lisse X , nous noterons $H(Y)$ le sous-espace vectoriel

$$\Gamma(Y - \partial Y, \mathcal{H}_X) \cap C^0(Y, \mathbb{R})$$

de $C^0(|Y|, \mathbb{R})$; vu le corollaire 2.3.14, cette notation coïncide avec celle introduite précédemment lorsque Y est strictement k -affinoïde.

La correspondance $Y \mapsto H(Y)$ est un préfaisceau sur le G -site X_G de X qui prolonge évidemment le préfaisceau sur le site X_R défini au début de 2.3.3.

PROPOSITION 2.3.18. — *Soient X une courbe strictement k -analytique lisse et K une extension non archimédienne de k ; notant X_K pour $X \widehat{\otimes}_k K$ et p_K le morphisme canonique $X_K \rightarrow X$, $p_K^* \mathcal{H}_X \subset \mathcal{H}_{X \widehat{\otimes}_k K}$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la définition du faisceau \mathcal{H}_X et du lemme 2.3.5. \square

Achevons ce paragraphe par le résultat suivant :

PROPOSITION 2.3.19. — *Soient X, Y deux courbes strictement k -analytiques lisses et $f : Y \rightarrow X$ un morphisme. Pour toute fonction harmonique $h \in \Gamma(X, \mathcal{H}_X)$, la fonction $f^*h = h \circ f$ est harmonique sur Y : $f^*h \in \Gamma(Y, \mathcal{H}_Y)$.*

Démonstration. On peut supposer Y connexe et f quasi-fini. Étant donnés des domaines strictement k -affinoïdes $W \subset Y$ et $V \subset X$ tels que $f(W) \subset V$, $h|_V \in H(V)$ et donc, par application des propositions 2.3.3 et 2.3.7, $(f^*h)|_W \in H(W)$. La fonction f^*h est donc harmonique sur Y . \square

2.3.4. Le préfaisceau $\log |\mathcal{O}_X^\times|$.

Considérant toujours une courbe strictement k -analytique lisse X , examinons maintenant les liens entre les fonctions harmoniques sur X et les fonctions de la forme $\log |f|$, $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$.

PROPOSITION 2.3.20. — *Pour toute section $f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$, la fonction $\log |f|$ est harmonique sur X .*

Démonstration. Il suffit de vérifier que la restriction de la fonction $\log |f|$ à tout domaine strictement k -affinoïde $Y \subset X$ appartient au sous-espace $H(Y) \subset C^0(|Y|, \mathbb{R})$; vu le lemme 2.3.5 et le théorème 2.3.8, on peut en outre supposer que Y est la fibre générique d'une S -courbe simplement semi-stable, auquel cas il ne reste plus qu'à invoquer le point (iii) de la proposition 2.2.24. \square

THÉORÈME 2.3.21. — *Soit X une courbe strictement k -analytique lisse. Le faisceau de \mathbb{R} -vectoriels engendré par les germes de fonctions $\log |f|$, f étant un germe de section de \mathcal{O}_X^\times , est un sous-faisceau de \mathcal{H}_X ; le quotient est un faisceau gratte-ciel sur $|X|$ et il est nul si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- le corps \tilde{k} est algébrique sur un corps fini ;
- la courbe $X \widehat{\otimes}_k \tilde{k}^a$ est localement isomorphe à $\mathbb{P}_{\tilde{k}^a}^1$.

Démonstration. Soit \mathcal{F}_X le sous-faisceau de \mathcal{C}_X associé au préfaisceau sur $|X|$ faisant correspondre à un ouvert U le sous-espace vectoriel de $C^0(U, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions $\log |f|$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X^\times)$; c'est un sous-faisceau de \mathcal{H}_X en vertu de la proposition précédente. Les germes de \mathcal{F}_X et \mathcal{H}_X coïncident en tout point x de X de type (1), (3) ou (4) :

- si x est de type (1) ou (4), ce point admet un système fondamental de voisinages k -affinoïdes ayant un unique point de Shilov et les sections de \mathcal{F}_X et \mathcal{H}_X sont donc constantes au voisinage de x ;
- si x est de type (3), ce point admet un système fondamental de voisinages k -affinoïdes ayant exactement deux points de Shilov ; les espaces vectoriels $\mathcal{F}_{X,x}$ et $\mathcal{H}_{X,x}$ sont alors de dimension 2, engendrés par les germes de la fonction constante 1 et de la fonction $\log |f|$, f étant une section quelconque de \mathcal{O}_X au voisinage de x telle que $|f|$ ne soit pas localement constante en x .

Soient maintenant $x \in X$ un point de type (2), k' une extension finie galoisienne de k et x' un point de $X' = X \otimes_k k'$ au-dessus de x : l'égalité $\mathcal{F}_{X',x'} = \mathcal{H}_{X',x'}$ implique l'égalité $\mathcal{F}_{X,x} = \mathcal{H}_{X,x}$. En effet, si V est un voisinage strictement k -affinoïde de x dans X , V' est la composante connexe de x' dans $V \otimes_k k'$, et $f' \in A_{V'}^\times$, la norme f de f' est un élément de A_V^\times tel que $p^*|f|_{|V'} = |f'|^{[k':k]}$; si une fonction $h \in H(V)$ est telle que $p^*h|_{V'}$ soit une combinaison linéaire de fonctions $\log |f|$, $f \in A_{V'}^\times$, c'est donc une combinaison linéaire de fonctions $\log |f|$, $f \in A_V^\times$. Cette remarque préliminaire permet de supposer que X est isomorphe à la fibre générique d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} et que le point x correspond à une composante irréductible propre et géométriquement connexe C_x de \mathcal{X}_s .

LEMME 2.3.22. — Avec les notations en vigueur, l'espace vectoriel $\mathcal{H}_{X,x}/\mathcal{F}_{X,x}$ est canoniquement isomorphe à l'espace vectoriel $\text{Pic}^0(C_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit V un voisinage strictement k -affinoïde de X . Il existe une extension galoisienne finie k' de k et un éclatement admissible $q : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X} \otimes_S \text{Spf}(k'^\circ)$ tel que $V \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique du schéma formel induit par \mathcal{X}' sur un ouvert U de \mathcal{X}'_s . La composante irréductible C_x de \mathcal{X}_s étant supposée géométriquement connexe, il y a un unique point $x' \in X \otimes_k k'$ au-dessus de x , correspondant à la composante irréductible $C_x \otimes_{\tilde{k}} k'$ de $\mathcal{X} \otimes_S \text{Spf}(S')$ et, celle-ci étant propre et lisse, le morphisme q induit un isomorphisme de la composante irréductible de \mathcal{X}' associée à x' sur $C_x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}'$.

À toute fonction $h \in H(V) = H(V \otimes_k k')^{\text{Gal}(k'/k)}$ correspond naturellement un \mathbb{R} -diviseur $\text{div}(h)$ sur la \tilde{k}' -courbe $C_x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}'$, vue comme composante irréductible de \mathcal{X}'_s : en effet, l'ensemble $T_{x'}S(\mathcal{X}')$ est canoniquement identifié à l'ensemble des points singuliers de \mathcal{X}'_s appartenant à $C_x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}'$ et, notant \tilde{x}_t le point correspondant à l'élément t de $T_{x'}S(\mathcal{X}')$, on pose :

$$\text{div}(h) = \sum_{t \in T_{x'}S(\mathcal{X}')} \lambda_{x,t}(h) [\tilde{x}_t].$$

La condition d'harmonicité de h en x' équivaut à la condition

$$\deg \text{div}(h) = 0.$$

Le groupe de Galois $\text{Gal}(k'/k)$ opère naturellement sur la \tilde{k}' -courbe $C_x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}'$ et son action est transitive sur chaque fibre du morphisme canonique $C_x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}' \rightarrow C_x$; puisque h est, par hypothèse, invariante sous $\text{Gal}(k'/k)$, cela implique que le \mathbb{R} -diviseur $\text{div}(h)$ sur $C_x \otimes_{\tilde{k}} \tilde{k}'$ descend en un \mathbb{R} -diviseur de degré 0 sur C_x , encore noté $\text{div}(h)$.

Nous obtenons ainsi une application linéaire $\text{div} : \mathcal{H}_{X,x} \rightarrow \text{Div}(C_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ s'insérant dans une suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{H}_{X,x} \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(C_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{deg}} \mathbb{R} \longrightarrow 0,$$

laquelle est exacte. Seule la surjectivité de div sur le sous-espace des \mathbb{R} -diviseurs de degré 0 requiert une démonstration. Soit

$$D = \sum_{\tilde{x} \in |D|} n(\tilde{x})[\tilde{x}]$$

un \mathbb{R} -diviseur de degré 0 sur C_x ; soit \mathcal{I} l'Idéal (admissible) définissant le sous-schéma fermé réduit $Z = |D| \cap (\mathcal{X}_s - \text{Sing}(\mathcal{X}_s))$ dans \mathcal{X}_s et soit $q : \mathcal{X}' \rightarrow \mathcal{X}$ son éclatement. Puisque \mathcal{X} est lisse aux points de Z , \mathcal{X}' est encore une S -courbe simplement semi-stable et on note \mathcal{Y} l'ouvert de \mathcal{X}' obtenu en retirant, à chacune des composantes irréductibles du diviseur exceptionnel de \mathcal{X}' , un point fermé disjoint (du transformé strict) de \mathcal{X} . La S -courbe \mathcal{Y} est simplement semi-stable et \mathcal{Y}_η est un voisinage de x dans $X = \mathcal{X}_\eta$. L'ensemble $T_x S(\mathcal{Y})$ s'identifie canoniquement à une partie finie de l'ensemble des points fermés de C_x et nous avons fait ce qu'il fallait pour que

$$|D| \subset T_x S(\mathcal{Y}).$$

Considérons alors une fonction affine par morceaux H sur $S(\mathcal{Y})$ telle que, pour tout polytope entier $P \subset S(\mathcal{Y})$ de dimension un correspondant à un élément $t \in T_x S(\mathcal{Y})$,

- $\lambda_{x,t}(H) = 0$ si $\tilde{x}_t \notin |D|$,
- $\lambda_{x,t}(H) = n(\tilde{x}_t)$ si $\tilde{x}_t \in |D|$.

Une telle fonction H est harmonique au point x en vertu de la nullité du degré de D ; elle est donc harmonique sur un voisinage de x dans $S(\mathcal{Y})$ et la fonction $h = \tau_{\mathcal{Y}}^* H$ sur X est par conséquent harmonique au voisinage de x dans X . L'identité

$$\text{div}(h) = D$$

est vérifiée par construction et nous avons ainsi établi l'exactitude de la suite considérée ci-dessus.

Soit $\text{Pr}(C_x)$ le groupe des diviseurs principaux sur C_x . On dispose d'une autre suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{F}_{X,x} \xrightarrow{\text{div}} \text{Pr}(C_x) \longrightarrow 0,$$

car, pour tout germe $\log |f| \in \mathcal{F}_{X,x}$, $f \in \mathcal{O}_{X,x}^\times$, le diviseur de la fonction harmonique $N \log |f|$ s'identifie à celui de la fonction méromorphe induite par f^N/α sur C_x , où N est un entier supérieur à 1 tel que $|f(x)|^N \in |k^\times|$ et α est un élément de k tel que $|f(x)|^N = |\alpha|$. Il en résulte un isomorphisme d'espaces vectoriels réels

$$\mathcal{H}_{X,x}/\mathcal{F}_{X,x} \xrightarrow{\sim} \text{Pic}^0(C_x) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R},$$

ce qui achève la preuve du lemme. □

Terminons la démonstration du théorème. Le faisceau $\mathcal{H}_X/\mathcal{F}_X$ est un faisceau gratte-ciel dont le support est un ensemble discret de points de type (2) ; sa nullité équivaut à la propriété suivante : pour tout point $x \in X \otimes_k \widehat{k}^a$ de type (2), le groupe de Picard $\text{Pic}^0(C_x)$ de la \widehat{k}^a -courbe irréductible, propre et lisse C_x , de corps des fonctions $\widetilde{\kappa}(x)$, est de *torsion*. Il y a au moins deux conditions impliquant cette propriété :

- le corps \widetilde{k} est algébrique sur un corps fini : $\text{Pic}^0(C_x)$ est l'ensemble des \widetilde{k}^a -points d'un \widetilde{k}^a -schéma en groupes de type fini et donc est de cardinal fini ;

- pour tout point $x \in X \otimes_k \widehat{k^a}$ de type (2), la $\widehat{k^a}$ -courbe irréductible, propre et lisse de corps des fonctions $\widehat{\kappa(x)}$ est rationnelle – de manière équivalente, $X \widehat{\otimes}_k \widehat{k^a}$ est localement isomorphe à $\mathbb{P}_{\widehat{k^a}}^1$ (si X est irréductible et propre, c'est une *courbe de Mumford*).

□

3. THÉORIE DU POTENTIEL

3.1. Le problème de Dirichlet

Dans ce qui suit, X est une courbe strictement k -analytique lisse.

3.1.1. Propriétés fondamentales des fonctions harmoniques.

Les sections du faisceau \mathcal{H}_X satisfont au *principe du maximum*.

PROPOSITION 3.1.1. — *Étant donné un ouvert Ω de X , une fonction $h \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H}_X)$ admet un extremum local en un point x de Ω si et seulement si elle est constante au voisinage de x .*

C'est la conjonction de la proposition 2.3.13 et du corollaire 2.3.14.

Le problème de Dirichlet est *localement résoluble* : tout point $x \in X$ admet un système fondamental de voisinages ouverts relativement compacts Ω tels que l'application de restriction

$$C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \cap \Gamma(\Omega, \mathcal{H}_X) \rightarrow C^0(\partial\Omega, \mathbb{R})$$

soit un isomorphisme. Il suffit en effet de prendre pour Ω l'intérieur d'un voisinage strictement k -affinoïde Y de x dans X et d'appliquer le lemme 2.3.9.

Le *principe de Harnack* est valide

PROPOSITION 3.1.2. — *Soient Ω un ouvert connexe de X et (Ω_n) une suite d'ouverts de X telle que chaque point de Ω admette un voisinage contenu dans presque tous les Ω_n : quelle que soit la suite croissante de fonctions $h_n \in \Gamma(\Omega_n, \mathcal{H}_X)$, l'alternative est la suivante :*

- soit (h_n) converge vers $+\infty$ uniformément sur tout compact de Ω ,
- soit (h_n) converge vers une fonction $h \in \Gamma(\Omega, \mathcal{H}_X)$, uniformément sur tout compact de Ω .

Démonstration. Puisque tout point de x admet un système fondamental de voisinages strictement k -affinoïdes, il découle du lemme 2.3.10 que l'ensemble U (resp. $U' = \Omega - U$) des points de Ω en lesquels la suite (h_n) est majorée (resp. n'est pas majorée) est une partie *ouverte* ; de plus, toujours par application de ce lemme, la suite (h_n) converge

- localement uniformément vers ∞ sur U' ;
- localement uniformément sur U vers une fonction h – nécessairement continue – telle que, pour tout domaine strictement k -affinoïde Y de Ω , la restriction de h à Y appartienne à $H(Y)$; vu la définition du faisceau \mathcal{H}_X (2.3.3), la fonction h est harmonique sur Ω . □

Notons également le résultat de convergence suivant :

PROPOSITION 3.1.3. — *Soient Ω un ouvert de X et (h_n) une suite de fonctions harmoniques sur Ω ; si la suite (h_n) est localement bornée, on peut en extraire une sous-suite convergeant, localement uniformément sur Ω , vers une fonction harmonique.*

Démonstration. Nous démontrerons au corollaire 3.3.7 que toute famille localement bornée de fonctions harmoniques sur Ω est automatiquement équicontinue en tout point de Ω ; bien entendu, la proposition ne sera pas utilisée d'ici là. Appliquant le théorème d'Ascoli, on peut extraire une sous-suite de (h_n) qui converge localement uniformément.

Il est facile de vérifier qu'une limite localement uniforme de fonctions harmoniques est harmonique : pour tout domaine k -affinoïde V de X , le sous-espace $\Gamma(V - \partial V) \cap C^0(V, \mathbb{R})$ de l'espace de Banach $C^0(V, \mathbb{R})$ est fermé car c'est un espace vectoriel de dimension finie. □

Remarque 3.1.4. — Puisque, pour tout domaine strictement k -affinoïde Y , l'espace vectoriel $H(Y)$ est de dimension finie, la limite h d'une suite simplement convergente de fonctions harmoniques sur un ouvert Ω de X est harmonique et la convergence est localement uniforme sur Ω .

Les propriétés du faisceau \mathcal{H}_X énoncées dans les trois paragraphes précédents permettent, en recopiant les démonstration du paragraphe 2.2 du chapitre V de [Ahl], de résoudre le problème de Dirichlet par la *méthode de Perron* ; ceci est l'objet de la fin de la section 3.1.

3.1.2. Fonctions sous-harmoniques.

DÉFINITION 3.1.5. — Soit Ω un ouvert de X ; une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est dite sous-harmonique si elle est semi-continue supérieurement, n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de Ω et satisfait à la condition suivante : pour tout domaine strictement k -affinoïde Y dans X et toute fonction $h \in H(Y)$,

$$(u|_{\partial Y} \leq h|_{\partial Y}) \implies (u|_Y \leq h).$$

L'assertion suivante n'est pas surprenante.

PROPOSITION 3.1.6. — Soient $\Omega \subset X$ un ouvert et $f \in \Gamma(\Omega, \mathcal{O}_X)$ une section inversible sur un ouvert dense de Ω ; la fonction $\log |f|$ est sous-harmonique sur Ω .

Démonstration. La fonction $\log |f|$ est continue sur Ω et, f étant inversible sur un ouvert dense, n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune des composante connexes de Ω .

Soient $Y \subset \Omega$ un domaine strictement k -affinoïde et $h \in H(Y)$ une fonction majorant $\log |f|$ sur $\Gamma(Y) = \partial Y$; puisqu'il suffit de prouver l'inégalité $\log |f|_Y \leq h$ après avoir effectué une extension finie k' de k , nous pouvons supposer que Y est la fibre générique d'une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} , de squelette $S(\mathcal{Y})$ et de rétraction $\tau_{\mathcal{Y}} : Y \rightarrow S(\mathcal{Y})$. Dans ces conditions :

- $H = h|_{S(\mathcal{Y})} \in H(S(\mathcal{Y}), \Gamma(Y))$ et $h = H \circ \tau_{\mathcal{Y}}$;
- la fonction $F = \log |f|_{S(\mathcal{Y})}$ est sous-harmonique sur $S(\mathcal{Y}) - \Gamma(Y)$ (proposition 2.2.24, (iii)) et $\log |f|_Y \leq F \circ \tau_{\mathcal{Y}}$ (proposition 2.2.24, (ii)) ;

la conclusion découle alors de l'inégalité $F \leq H$ sur $S(\mathcal{Y})$. \square

Remarque 3.1.7. — Nous verrons plus loin (proposition 3.4.6) que, pour toute S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} et toute fonction sous-harmonique u sur $\mathcal{X}_{\eta} - \Gamma(\mathcal{X}_{\eta})$, la restriction U de u à $S(\mathcal{X}) - \Gamma(\mathcal{X}_{\eta})$ est sous-harmonique (= convexe) : $\mathrm{dd}^c U \geq 0$, l'opérateur dd^c étant entendu au sens des courants, comme expliqué à en 1.2.5.

Les propriétés suivantes des fonctions sous-harmoniques sont évidentes.

PROPOSITION 3.1.8. — Étant donné un ouvert Ω de X ,

- (i) l'ensemble des fonctions sous-harmoniques sur Ω est un cône réel stable par max : pour toutes fonctions u, v sous-harmoniques sur Ω et tous nombres réels positifs μ, ν , les fonctions $\mu u + \nu v$ et $\max(u, v)$ sont sous-harmoniques sur Ω ;
- (ii) l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de fonctions sous-harmoniques sur Ω est, sur chacune des composantes connexes de Ω , sous-harmonique ou identiquement égale à $-\infty$;
- (iii) la régularisation semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure d'une famille croissante et localement bornée de fonctions sous-harmoniques sur Ω est sous-harmonique.

Le cône des fonctions sous-harmoniques sur un ouvert Ω de X est noté $\mathcal{SH}(\Omega)$.

LEMME 3.1.9. — *Soit Y un domaine strictement k -affinoïde connexe dans X ; toute fonction sous-harmonique u sur un voisinage de Y prend des valeurs finies aux points de $\Gamma(Y) = \partial Y$.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une fonction sous-harmonique u sur un voisinage Ω de Y prenant la valeur $-\infty$ en un point x de $\Gamma(Y)$. Notant M un majorant de u sur $\Gamma(Y)$, le lemme 2.3.9 fournit, pour tout entier naturel N , une fonction h_N dans $H(Y)$ valant $-N$ en x et égale à M sur $\Gamma(Y) - \{x\}$; la suite (h_N) est décroissante et converge, localement uniformément sur $Y - \Gamma(Y)$, vers $-\infty$ par application du lemme 2.3.10. La restriction de u à $Y - \Gamma(Y)$, majorée par h_N pour tout N , est donc identiquement égale à $-\infty$.

Étant donné un domaine strictement k -affinoïde Y' dans X dont le bord de Shilov rencontre $\text{Int}(Y) = Y - \Gamma(Y)$, le raisonnement précédent implique $u|_{\text{Int}(Y')} = -\infty$. On considère alors un recouvrement localement fini \mathcal{V} de la composante connexe de x dans Ω par des domaines strictement k -affinoïdes de X tel qu'il existe pour tout $V \in \mathcal{V}$ un domaine V' dans \mathcal{V} satisfaisant à la condition : $\Gamma(V) \cap \text{Int}(V') \neq \emptyset$. D'après la première partie de la démonstration, la fonction u est identiquement égale à $-\infty$ sur la composante connexe de x dans Ω , en contradiction avec la définition 3.1.5. \square

Remarque 3.1.10. — 1. Le résultat précédent sera étendu plus loin (3.4.10) au cas d'un domaine k -affinoïde quelconque dans X .

2. Le lemme 3.1.9 permet de reformuler ainsi la définition de la sous-harmonicité : une fonction semi-continue supérieurement $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ est sous-harmonique si elle n'est pas identiquement égale à $-\infty$ sur une composante connexe de Ω et si, pour tout domaine strictement k -affinoïde V in Ω , la fonction $h \in H(V)$ qui coïncide avec u sur $\Gamma(V)$ – dont l'existence découle des lemmes 3.1.9 et 2.3.9 – majore u sur tout V . Cette définition est équivalente à la précédente en vertu du principe du maximum pour les fonctions harmoniques (proposition 3.1.1).

Soit Ω un ouvert de X ; l'ensemble des points de Shilov des domaines strictement k -affinoïdes de X étant partout dense, le lemme précédent implique immédiatement que la restriction d'une fonction sous-harmonique sur Ω à un ouvert $\Omega' \subset \Omega$ ne peut être identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de Ω' . La correspondance $\Omega \mapsto \mathcal{SH}(\Omega)$ est par conséquent un *préfaisceau* de cônes réels sur $|X|$. Nous bientôt qu'il s'agit en fait d'un faisceau (corollaire 3.1.13).

Les fonctions sous-harmoniques satisfont au *principe du maximum* suivant.

PROPOSITION 3.1.11. — *Étant donné un ouvert Ω de X , une fonction sous-harmonique u sur Ω admettant un maximum local en un point x de Ω est localement constante au voisinage de x .*

Démonstration. Soit u une fonction sous-harmonique admettant un maximum au point x de Ω et soit U un voisinage ouvert connexe de x dans Ω tel que $u|_U \leq u(x)$; puisque $u|_U$ n'est pas identiquement égale à $-\infty$, $u(x) > -\infty$.

Soit Y un voisinage strictement k -affinoïde connexe Y de x dans U . La restriction de u à $\Gamma(Y)$ est constante, égale à $u(x)$: s'il existait, en effet, un point $y \in \Gamma(Y)$ tel que $u(y) < u(x)$, le lemme 2.3.9 fournirait une fonction $h \in H(Y)$ telle que

- $h(y) = u(y)$;
- $h|_{\Gamma(Y) - \{y\}} = u(x)$;

puisque Y est connexe et h non constante, le principe du maximum pour les fonctions harmoniques impliquerait alors $h|_{Y-\Gamma(Y)} < u(x)$ et donc, par sous-harmonicité, l'inégalité absurde $u(x) \leq h(x) < u(x)$.

La conclusion est maintenant immédiate : l'ensemble des points de Shilov des voisinages strictement k -affinoïdes connexes de x dans U étant une partie dense de U , la fonction semi-continue supérieurement $u|_U$ est constante, égale à $u(x)$. \square

COROLLAIRE 3.1.12. — *Soient $\Omega \subset X$ un ouvert et $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ une fonction semi-continue supérieurement qui n'est identiquement égale à $-\infty$ sur aucune composante connexe de Ω . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est sous-harmonique ;*

(ii) *pour tout ouvert $\Omega' \subset \Omega$ et pour toute fonction harmonique h sur Ω' , la fonction $u|_{\Omega'} - h$ satisfait au principe du maximum (proposition 3.1.11) sur Ω' .*

Démonstration. L'implication (i) \Rightarrow (ii) est l'application directe de la proposition précédente puisque toute fonction harmonique est sous-harmonique.

L'implication réciproque est immédiate : étant donné un domaine strictement k -affinoïde $V \subset \Omega$ et une fonction $h \in H(V)$ telle que $u|_{\partial V} \leq h|_{\partial V}$, l'application du principe du maximum à la fonction $u - h$ sur $v - \partial V$ implique que celle-ci atteint son maximum en un point de ∂V ; elle est donc négative. La fonction u est bien sous-harmonique sur Ω . \square

La reformulation précédente de la définition 3.1.5 met en évidence le caractère local de la sous-harmonicité.

COROLLAIRE 3.1.13. — *Le préfaisceau \mathcal{SH} sur $|X|$ est un faisceau.*

Démonstration. La semi-continuité supérieure et le fait de ne pas être identiquement $-\infty$ sur une composante connexe sont des propriétés de nature locale. La propriété (ii) du corollaire précédent est également de nature locale. \square

PROPOSITION 3.1.14. — *Soit X une courbe strictement k -analytique lisse. Étant donné une courbe strictement k -analytique lisse Y , un morphisme $f : Y \rightarrow X$ et une fonction sous-harmonique u sur X , la fonction $f^*u = u \circ f$ est sous-harmonique ou identiquement égale à $-\infty$ sur chaque composante connexe de Y .*

Démonstration.

La courbe Y peut être supposée connexe et, l'assertion étant évidente pour un morphisme constant, il suffit de traiter le cas d'un morphisme quasi-fini.

Soit u une fonction sous-harmonique sur X ; puisqu'il est loisible de se localiser sur Y pour établir la sous-harmonicité de f^*u , on peut supposer que le morphisme f est fini. Considérons alors un domaine strictement k -affinoïde $V \subset Y$ et une fonction h dans $H(V)$ qui coïncide avec f^*u sur $\partial V = \Gamma(V)$; $W = f(V)$ est un domaine strictement k -affinoïde dans X tel que $f^{-1}(\partial W) = \partial V$ en vertu des proposition 3.1.3 (ii) et corollaire 2.5.13 (i) de [3] (la première implique $\partial V = f^{-1}(\partial W) \cap (V - \text{Int}(f))$, la seconde fournit l'égalité $\text{Int}(f) = V$).

Soit h' la fonction dans $H(W)$ qui coïncide avec u sur ∂W . La fonction f^*h' appartient à $H(f^{-1}(W))$ (proposition 2.3.19) et est égale à h sur $\partial f^{-1}(W) = \partial V$; le principe du maximum implique alors l'identité $h = f^*h'$, d'où découle l'inégalité

$$f^*u \leq f^*h = h'$$

en vertu de la sous-harmonicité de u . \square

Remarque 3.1.15. — Soit Ω un ouvert relativement compact de X ; toute fonction sous-harmonique u sur Ω se prolonge de façon unique en une fonction semi-continue supérieurement

\bar{u} sur le compact $\bar{\Omega}$ (à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) et, appliquant la proposition précédente :

$$\sup_{\Omega} u = \max_{\partial\Omega} \bar{u}.$$

3.1.3. La méthode de Perron.

Étant donné un ouvert relativement compact et connexe $\Omega \subset X$ et une fonction (réelle) bornée f sur $\partial\Omega$, le *problème de Dirichlet* est la question de savoir s'il existe une fonction semi-continue supérieurement h sur $\bar{\Omega}$, harmonique sur Ω et dont la restriction à la frontière $\partial\Omega$ de Ω coïncide avec f .

En vertu du lemme 2.3.9 le problème de Dirichlet est résoluble lorsque Ω est une composante connexe de l'intérieur d'un domaine strictement k -affinoïde de X .

La *méthode de Perron* associe canoniquement au couple (Ω, f) une fonction bornée P_f sur $\bar{\Omega}$ dont la restriction à Ω est harmonique. Il reste alors à étudier le comportement de P_f sur la frontière $\partial\Omega$, ce qui se fait grâce à la notion de *barrière*.

Considérons la famille $\mathcal{F}(f)$ des fonctions u :

- (i) semi-continues supérieurement sur $\bar{\Omega}$,
- (ii) sous-harmoniques sur Ω ,
- (iii) dont la restriction à $\partial\Omega$ est majorée par f ,

et soit P_f son enveloppe supérieure.

La fonction f étant bornée, il en est de même pour la famille $\mathcal{F}(f)$ en vertu du principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques (cf. proposition 3.1.11). Cette observation montre que la famille $\mathcal{F}(f)$ est non vide et l'on note P_f son enveloppe supérieure.

PROPOSITION 3.1.16. — *La fonction P_f est harmonique sur Ω .*

Démonstration. Établissons l'harmonicité de la fonction P_f sur l'ouvert Ω . Soient Y un domaine strictement k -affinoïde connexe dans X , x un point dans $\text{Int}(Y)$ et (u_n) une suite dans $\mathcal{F}(f)$ convergeant vers $P_f(x)$ au point x ; quitte à remplacer, pour tout n , u_n par la fonction $\max(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{F}(f)$, on peut en outre supposer cette suite croissante. Considérons, pour tout entier naturel n , la fonction h_n dans $H(Y)$ qui coïncide avec u_n sur $\Gamma(Y)$ (lemme 2.3.9) et soit v_n la fonction de $\bar{\Omega}$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ telle que

$$v_n|_Y = h_n \quad \text{et} \quad v_n|_{\bar{\Omega}-Y} = u_n|_{\bar{\Omega}-Y};$$

la sous-harmonicité de u_n implique l'inégalité $u_n \leq v_n$.

Cette fonction est semi-continue supérieurement sur $\bar{\Omega}$ et trivialement sous-harmonique sur $\Omega - \Gamma(Y)$. Soient $y \in \Gamma(Y)$, Y' un voisinage strictement k -affinoïde de y dans Ω et h' une fonction dans $H(Y')$ telle que $v_n|_{\partial Y'} \leq h'|_{\partial Y'}$. Puisque $u_n \leq v_n$, h' majore u_n sur $\partial Y'$ et, donc, sur tout Y' . D'autre part, h' majore h_n sur $\Gamma(Y') \cap Y$ et $\Gamma(Y) \cap Y'$, donc sur $\Gamma(Y \cap Y') = (\Gamma(Y') \cap Y) \cup (\Gamma(Y) \cap Y')$ et sur $Y \cap Y'$; il en découle que h' majore v_n sur Y' . Ceci prouve la sous-harmonicité de v_n au voisinage de $\Gamma(Y')$, et donc sur tout l'ouvert Ω . Remarquons enfin que, les fonctions v_n et u_n coïncidant au voisinage de $\partial\Omega$, la fonction f majore la restriction de v_n à $\partial\Omega$. Tout ceci établit l'appartenance de la fonction v_n à la famille $\mathcal{F}(f)$, d'où découlent les inégalités

$$u_n \leq v_n \leq P_f$$

pour tout entier naturel n .

Par application du lemme 2.3.10, la suite (h_n) converge, uniformément sur Y , vers une fonction $h_Y \in H(Y)$ et, en vertu des inégalités précédentes, $P_f(x) = h(x)$.

Considérons un autre point $y \in Y - \Gamma(Y)$ et une suite (w_n) dans $\mathcal{F}(f)$ qui converge vers $P_f(y)$ en y . Appliquant la construction précédente à la suite (w'_n) définie par $w'_n = \max(u_n, w_n)$, nous obtenons une fonction $h' \in H(Y)$ telle que $h'(y) = P_f(y)$ et $h \leq h' \leq P_f$; il en découle l'égalité $h(x) = h'(x) = P_f(x)$, qui montre que la fonction $h - h' \in H(Y)$ atteint son maximum au point x de $Y - \Gamma(Y)$. En vertu de la connexité de Y , ce qui précède implique l'égalité $h' = h$ par application du principe du maximum.

Nous venons de prouver que, pour tout domaine strictement k -affinoïde connexe Y dans Ω , les fonctions h_Y et $P_f|_Y$ coïncident; la fonction extrémale P_f est donc harmonique sur l'ouvert Ω . \square

DÉFINITION 3.1.17. — Une barrière en un point $\zeta \in \partial\Omega$ est une fonction continue b sur $\overline{\Omega}$, sous-harmonique sur Ω et telle que

- $b < 0$ sur $\overline{\Omega} - \{\zeta\}$;
- $b(\zeta) = 0$.

Remarque 3.1.18. — L'existence d'une barrière est un problème local : en effet, si $\zeta \in \partial\Omega$ et s'il existe un voisinage ouvert U de ζ dans X tel qu'il existe une barrière b' en ζ relativement à l'ouvert $\Omega' = \Omega \cap U$, on peut trouver $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que le fermé $F = \{b' \geq -\varepsilon\}$ soit contenu dans $\overline{\Omega} \cap U$ et la fonction réelle b sur $\overline{\Omega}$ définie par

$$b|_{\overline{\Omega} \cap U} = \max(b', -\varepsilon), \quad b|_{\overline{\Omega} - F} = -\varepsilon$$

est alors une barrière en ζ relativement à Ω .

PROPOSITION 3.1.19. — Supposons qu'il existe une barrière en un point ζ de $\partial\Omega$.

(i) Si f est semi-continue supérieurement en ζ ,

$$\limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} P_f(x) \leq f(\zeta).$$

(ii) Si f est semi-continue inférieurement en ζ ,

$$\liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} P_f(x) \geq f(\zeta).$$

(iii) Si f est continue en ζ ,

$$\lim_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} P_f(x) = f(\zeta).$$

Démonstration. Soient b une barrière en ζ et M la borne supérieure de $|f|$ sur $\partial\Omega$.

(i) Supposons f semi-continue supérieurement en ζ . Étant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, il existe un voisinage ouvert U de ζ dans $\partial\Omega$ sur lequel $f \leq f(\zeta) + \varepsilon$ et les hypothèses sur b permettent de trouver $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que $b \leq -2M/\lambda$ sur le compact $\partial\Omega - U$. La fonction $g_\varepsilon = -\lambda b + f(\zeta) + \varepsilon$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et $-g_\varepsilon$ est sous-harmonique sur Ω . Par construction g_ε majore la fonction f , et donc tous les éléments de $\mathcal{F}(f)$, sur $\partial\Omega$. Quelle que soit la fonction $u \in \mathcal{F}(f)$, $u - g_\varepsilon$ est négative sur $\partial\Omega$ et sous-harmonique sur Ω ; invoquant le principe du maximum (3.1.11), on en déduit l'inégalité

$$u \leq g_\varepsilon.$$

Il en découle la majoration

$$P_f \leq g_\varepsilon$$

sur $\overline{\Omega}$ et donc

$$\limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} P_f(x) \leq \limsup_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} g_\varepsilon(x) = f(\zeta) + \varepsilon.$$

(ii) Lorsque f est supposée semi-continue inférieurement, il existe, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, un voisinage U de ζ dans $\partial\Omega$ tel que $f|_U \geq f(\zeta) - \varepsilon$. Choissant de nouveau $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ tel que

$\lambda b < -2M$ sur $\partial\Omega - U$, la fonction $g'_\varepsilon = f(\zeta) - \varepsilon + \lambda b$ est continue sur $\overline{\Omega}$, sous-harmonique sur Ω majorée par f sur $\partial\Omega$. C'est donc un élément de la famille $\mathcal{F}(f)$, ce qui implique l'inégalité

$$g'_\varepsilon \leq P_f$$

et

$$f(\zeta) - \varepsilon = \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} g'_\varepsilon \leq \liminf_{x \in \Omega, x \rightarrow \zeta} P_f(x).$$

Le point (iii) découle de la conjonction des deux précédents. \square

PROPOSITION 3.1.20. — *Il existe une barrière en tout point de $\partial\Omega$ de type (2), (3) ou (4).*

Démonstration. Tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel qu'il existe un morphisme étale $p : U \rightarrow \mathbb{A}_k^1$. Les points x et $p(x)$ étant du même type, il est suffisant, en vertu de la proposition 3.1.13 et de la remarque 3.1.20, de traiter le cas $X = \mathbb{A}_k^1$.

Soit $x \in \mathbb{A}_k^1$ un point de type (2) ou (3) et soit $\Omega \subset \mathbb{A}_k^1$ un ouvert connexe tel que $x \in \partial\Omega$; en vertu de sa connexité, Ω ne rencontre qu'une seule composante connexe de $\mathbb{A}_k^1 - \{x\}$ et il suffit d'établir l'existence d'une barrière en x dans le cas où Ω est l'une des composantes connexes de \mathbb{A}_k^1 , ce que l'on suppose désormais.

Si la composante Ω est bornée, considérons un point $x \in \Omega$ tel que l'extension $\kappa(x)/k$ soit finie, de polynôme minimal unitaire $f \in k[T]$. En vertu des propositions 3.1.7 et 3.1.12, la fonction $\log |f| - \log |f|(x)$ est sous-harmonique et strictement négative sur Ω ; puisqu'elle est continue sur $\overline{\Omega}$, il s'agit bien d'une barrière pour le point x de $\partial\Omega$.

Si la composante Ω n'est pas bornée, la fonction $\log |T|(x) - \log |T|$ est (sous-)harmonique et strictement négative sur Ω d'après les propositions 2.3.20 et 3.1.12; étant continue sur $\overline{\Omega}$, cette fonction est bien une barrière pour le point x de $\partial\Omega$.

Soient $x \in \mathbb{A}_k^1$ un point de type (4) et E_n une suite décroissante de disques fermés dans \mathbb{A}_k^1 d'intersection $\{x\}$; désignons par y_n le point de Shilov de E_n . Ayant choisi, pour tout entier naturel n , un point $x_n \in E_n$ tel que l'extension $\kappa(x_n)/k$ soit finie, de polynôme minimal unitaire $f_n \in k[T]$, considérons la fonction harmonique et strictement négative

$$g_n = \frac{1}{\deg(f_n)} (\log |f_n|(y_n) - \log |f_n|)$$

sur $\mathbb{A}_k^1 - E_n$; la suite (g_n) est décroissante et son enveloppe inférieure g est une fonction sous-harmonique ou identiquement égale à $-\infty$ sur \mathbb{A}_k^1 , harmonique sur $\mathbb{A}_k^1 - \{x\}$ et s'annulant au point x . Soient $K = \mathcal{H}(x)$, $p : \mathbb{A}_K^1 \rightarrow \mathbb{A}_k^1$ le morphisme canonique et $t \in \mathbb{A}_K^1(K)$ tel que $p(t) = x$. Les fonctions p^*g_n et $\log |T - t|(y_n) - \log |T - t|$ coïncidant sur $\mathbb{A}_K^1 - p^{-1}(E_n)$ pour tout n , la fonction p^*g est continue et sous-harmonique sur $\mathbb{A}_K^1 - p^{-1}(x)$; il en est donc de même de g .

Nous venons de prouver qu'il existe, pour tout point $x \in \mathbb{A}_k^1$ de type (2), (3) ou (4), une fonction semi-continue supérieurement $b : \mathbb{A}_k^1 \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, nulle au point x , sous-harmonique et strictement négative sur $\mathbb{A}_k^1 - \{x\}$; cela fournit une barrière en x relativement à tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{A}_k^1$ tel que $x \in \partial\Omega$. \square

Le lemme 2.3.9 se généralise au cas d'un domaine k -affinoïde quelconque dans X .

COROLLAIRE 3.1.21. — *Pour tout domaine k -affinoïde Y dans X , l'application de restriction*

$$H(Y) \rightarrow \text{Hom}(\Gamma(Y), \mathbb{R})$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les deux propositions précédentes à l'ouvert relativement compact $\text{Int}(Y) \subset X$. \square

3.2. Fonctions lisses, opérateur dd^c

Disposant du faisceau \mathcal{H}_X des germes de fonctions harmoniques sur une courbe strictement k -analytique lisse X et de la résolution partielle du problème de Dirichlet obtenue à la section précédente, nous allons maintenant définir les faisceaux \mathcal{A}_X^0 (resp. \mathcal{A}_X^1) des germes de *fonctions lisses* (resp. *formes lisses*) sur X et un « opérateur de Laplace » $dd^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^1$; celui-ci sera classiquement étendu à des espaces de distributions dans la section suivante.

Désignons par $I(X)$ l'ensemble des points de X de type (2) ou (3); de manière équivalente, $I(X)$ est l'ensemble des points de Shilov des domaines k -affinoïdes de X . Plus précisément : le bord de Shilov $\Gamma(Y)$ d'un domaine k -affinoïde Y de X est un sous-ensemble fini de $I(X)$ et toute partie finie S de $I(X)$ est la réunion des bords de Shilov d'un nombre fini de domaines k -affinoïdes.

3.2.1. Les faisceaux \mathcal{A}_X^0 et \mathcal{A}_X^1 sur X_G .

Dans ce qui suit, X désigne une courbe strictement k -analytique lisse.

DÉFINITION 3.2.1. — *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert.*

(i) *Une fonction réelle $\varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R})$ est dite lisse s'il existe un recouvrement localement fini \mathcal{V} de Ω par des domaines k -affinoïdes Y tel que $\varphi|_Y \in H(Y)$. L'ensemble des fonctions lisses sur Ω est un sous-espace vectoriel de $C^0(\Omega, \mathbb{R})$, noté $A^0(\Omega)$.*

(ii) *On désigne par $A^1(\Omega)$ l'espace vectoriel des mesures réelles sur Ω dont le support est un sous-ensemble localement fini de $I(\Omega)$. Les éléments de $A^1(\Omega)$ seront appelés formes lisses (sur Ω).*

(iii) *Le sous-espace vectoriel de $A^0(\Omega)$ (resp. $A^1(\Omega)$) constitué des fonctions (resp. mesures) dont le support est compact se note $A_c^0(\Omega)$ (resp. $A_c^1(\Omega)$).*

La correspondance $\Omega \mapsto A^0(\Omega)$ est un sous-faisceau du faisceau \mathcal{C}_X^0 des germes de fonctions réelles continues sur X .

La définition du faisceau \mathcal{A}_X^0 s'étend d'elle même au G -site X_G de X : il suffit, pour tout objet V de X_G , de définir $A^0(V)$ comme le sous-espace vectoriel de $C^0(V, \mathbb{R})$ constitué des fonctions φ continues sur V qui satisfont à la condition suivante : tout point $x \in V$ possède un voisinage k -affinoïde $W \subset V$ tel que $\varphi|_W \in H(W)$. Désignant par \mathcal{A}_X^0 le faisceau ainsi défini sur X_G et notant $\pi : X_G \rightarrow |X|$ le morphisme de sites canonique, l'identité

$$\mathcal{A}_X^0 = \pi_* \mathcal{A}_X^0$$

est évidente. La proposition suivante l'est tout autant.

PROPOSITION 3.2.2. — *L'homomorphisme canonique de préfaisceaux $H_X \rightarrow \mathcal{A}_X^0$ sur le site X_G identifie \mathcal{A}_X^0 au faisceau associé à H_X .*

Remarque 3.2.3

1. La proposition précédente répond à la question soulevée par le point 2 de la remarque 2.3.11.

2. Pour toute extension finie galoisienne k'/k , l'homomorphisme canonique

$$A_X^0 \rightarrow (A_{X \otimes_k k'}^0)^{\text{Gal}(k'/k)}$$

est un isomorphisme de faisceaux sur X_G .

La proposition suivante n'est guère surprenante, compte tenu de la construction du faisceau \mathcal{H}_X .

PROPOSITION 3.2.4. — *Une fonction réelle φ sur un ouvert $\Omega \subset X$ est lisse si et seulement s'il existe, pour tout domaine strictement k -analytique compact $Y \subset \Omega$, une extension finie (séparable) k'/k et une $\text{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} telles que :*

- $\mathcal{Y}_\eta = Y \otimes_k k'$;
- la fonction $\Phi = (\varphi \otimes 1)_{|S(\mathcal{Y})}$ appartient à l'espace $A^0(S(\mathcal{Y}))$;
- $\varphi_{|Y \otimes_k k'} = \Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}$.

Démonstration. Soit $Y \subset X$ un domaine strictement k -analytique compact.

Étant données une extension finie galoisienne k'/k et une $\text{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} de fibre générique $Y \otimes_k k'$, considérons une fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}))$ et notons S la réunion du support de la mesure $\text{dd}^c \Phi$ et du bord de Shilov $\Gamma(\mathcal{Y}_\eta)$ de \mathcal{Y}_η . Quelle que soit la composante connexe c de $S(\mathcal{X}) - S$, la restriction de Φ au domaine polyédral \bar{c} appartient à l'espace $H(\bar{c})$ et la fonction $\Phi|_{\bar{c}} \circ \tau_{\mathcal{Y}} = (\Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}})|_{\tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(\bar{c})}$ sur le domaine k -analytique $\tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(\bar{c})$ de $Y \otimes_k k'$ appartient à $H(\tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(\bar{c}))$; en vertu de la proposition précédente, cela implique $\Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}} \in A^0(Y \otimes_k k')$. La condition de l'énoncé est donc suffisante.

Considérons réciproquement une fonction $\varphi \in A^0(Y)$ et un recouvrement fini \mathcal{V} de Y par des domaines k -affinoïdes V tels que $\varphi|_V \in H(V)$; par application du point (ii) du lemme 2.2.22, il existe une extension finie (séparable) k'/k et une $\text{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} , de fibre générique $Y \otimes_k k'$, dont le squelette $S(\mathcal{Y})$ contient l'ensemble Γ des points de Shilov des domaines k' -affinoïdes $V \otimes_k k'$, $V \in \mathcal{V}$. Désignons par Φ la restriction de $\varphi' = \varphi \otimes 1$ au squelette $S(\mathcal{Y})$ de \mathcal{Y} . Les fibres de la rétraction $\tau_{\mathcal{Y}}$ sont des domaines k' -affinoïdes dont le bord de Shilov est réduit à un point ; la fonction φ' , étant harmonique sur $Y \otimes_k k' - \Gamma$, est par suite constante chaque fibre de $\tau_{\mathcal{Y}}$ en vertu du principe du maximum et

$$\varphi' = \Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}.$$

Vérifions enfin l'appartenance de Φ à l'espace $A^0(S(\mathcal{Y}))$: quel que soit le polytope entier $P \subset S(\mathcal{Y}) - \Gamma$ dont le bord est formé de points de type (2), $W = \tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(P)$ est un domaine strictement k -affinoïde dans Y tel que $\varphi'|_W \in H(\tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(P))$ (corollaire 2.3.14) ; on a donc $\Phi|_P = (\varphi'|_W)|_P \in H(P)$ et la fonction continue Φ est bien affine par morceaux sur $S(\mathcal{Y})$. \square

La proposition 3.2.2 peut maintenant être précisée de manière à donner une nouvelle définition du faisceau A_X^0 sur le G -site X_G de X . Étant donné un domaine k -analytique $V \subset X$, convenons de désigner par $\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X(V)^\times|$ le sous-espace vectoriel réel de $C^0(V, \mathbb{R})$ engendré par les fonctions de la forme $\log |f|$, $f \in \mathcal{O}_X(V)^\times$. La correspondance

$$\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X^\times| : V \mapsto \mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X(V)^\times|$$

est un sous-préfaisceau de A_X^0 sur X_G puisque $\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X(V)^\times| \subset H(V)$ pour tout domaine k -affinoïde $V \subset X$.

PROPOSITION 3.2.5. — *L'homomorphisme canonique $\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X^\times| \rightarrow A_X^0$ identifie A_X^0 au faisceau associé au préfaisceau $\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X^\times|$.*

Démonstration. Soit \mathcal{F}_X le faisceau sur X_G associé au préfaisceau $\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X^\times|$. Quelle que soit l'extension galoisienne finie k'/k , la norme $N_{k'/k} : (p_{k'})_*(\mathcal{O}_X \otimes_k k')^\times \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$ induit un homomorphisme $N_{k'/k} : (p_{k'})_* \mathcal{F}_{X \otimes_k k'} \rightarrow \mathcal{F}$ tel que

$$f = \frac{1}{[k' : k]} N_{k'/k}(f \otimes 1)$$

pour toute section f de \mathcal{F} , $p_{k'}$ désignant la projection canonique de $X \otimes_k k'$ sur X . Il suffit donc de prouver qu'une section φ de A_X^0 provient de \mathcal{F}_X après passage à une extension galoisienne finie de k .

Soient $Y \subset X$ un domaine k -analytique compact et φ une fonction dans $A_X^0(Y)$. Il existe par hypothèse un recouvrement fini \mathcal{V} de Y par des domaines k -affinoïdes V tels que $\varphi|_V \in H(V)$ et, comme dans la démonstration précédente, on peut trouver une extension galoisienne finie k'/k et une $\mathrm{Spf}(k'^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} dont la fibre générique est un voisinage de $Y \otimes_k k'$ dans $X \otimes_k k'$ et dont le squelette $S(\mathcal{Y})$ contient l'ensemble Γ de tous les points de Shilov des domaines k -affinoïdes $V \otimes_k k'$, $V \in \mathcal{V}$.

Considérons alors une décomposition élémentaire \mathcal{D} de $S(\mathcal{Y})$ telle que $\Gamma \subset \mathcal{D}[0]$ (on rappelle que $\mathcal{D}[0]$ est l'ensemble des 0-faces des polytopes figurant dans \mathcal{D}). Quel que soit le polytope $Q \in \mathcal{D}$, $\tau^{-1}(Q)$ est un domaine k -affinoïde et, par construction,

$$\varphi|_Q \in H(\tau^{-1}(Q)) = \mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X(\tau^{-1}(Q))|.$$

□

Remarque 3.2.6. — Cette proposition est à rapprocher des considérations de 2.3.4.

3.2.2. Un résultat de densité.

Soit E un espace topologique localement compact. L'ensemble des fonctions réelles continues sur E dont le support est contenu dans un compact K de E est noté $C^0(E, \mathbb{R})_K$ et la norme $\sup_K |\cdot|$ en fait un espace de Banach. La restriction de E à K induit une isométrie de $C^0(E, \mathbb{R})_K$ sur le sous-espace vectoriel fermé de l'espace de Banach $C^0(K, \mathbb{R})$ formé des fonctions s'annulant sur $\partial K = K \cap \overline{E - K}$.

L'espace vectoriel $C_c^0(E, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur E dont le support est compact est muni de la topologie localement convexe limite inductive des topologies d'espaces de Banach sur les $C^0(E, \mathbb{R})_K$; c'est la topologie localement convexe la plus fine rendant continues les injections $C^0(E, \mathbb{R})_K \rightarrow C_c^0(E, \mathbb{R})$.

Lorsque E est l'espace topologique sous-jacent à une courbe strictement k -analytique lisse X , il est loisible de ne considérer que des compacts K qui sont des domaines strictement k -analytiques (i.e. des réunions finies de domaines strictement k -affinoïdes) : tout compact de X est en effet contenu dans un domaine strictement k -analytique compact.

PROPOSITION 3.2.7. — *Le sous-espace $A_c^0(X)$ est dense dans $C_c^0(X, \mathbb{R})$.*

Démonstration. Soient K un domaine k analytique compact de X , $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ et f une fonction continue sur X s'annulant en dehors de K . De l'uniforme continuité de f sur K découle l'existence d'une famille finie \mathcal{V} de domaines k -affinoïdes dans X dont la réunion K' contient K et telle que, pour tout $V \in \mathcal{V}$ et tous $x, y \in V$, $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/2$. Appliquant le lemme suivant au domaine k -analytique compact K' et au sous-ensemble Σ réunion des points de Shilov des $V \in \mathcal{V}$ et de la frontière de K , il existe une fonction $g \in A^0(X)$ telle que $g_\Sigma = f_\Sigma$. Cette fonction s'annule sur la frontière de K' et appartient donc à $A^0(X)_K$.

Étant donné $V \in \mathcal{V}$, la fonction g satisfait, par construction, à l'inégalité

$$|g(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous points $x, y \in \Sigma \cap V$ et donc, en vertu du principe du maximum,

$$|g(x) - g(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

pour tous $x \in V$, $y \in \Sigma \cap V$. Fixant un point y dans l'ensemble non vide $\Sigma \cap V$ (il contient $\Gamma(V)$), il vient alors

$$|g(x) - f(x)| \leq |g(x) - g(y)| + |g(y) - f(x)| = |g(x) - g(y)| + |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon$$

pour tout $x \in V$ et, donc

$$\sup_K |f - g| \leq \sup_{K'} |f - g| = \max_{V \in \mathcal{V}} |f|_V - g|_V| \leq \varepsilon.$$

La proposition est démontrée. \square

LEMME 3.2.8. — *Soit K un domaine k -analytique compact de X ; pour tout sous-ensemble fini $\Sigma \subset K$ et toute fonction $f \in C^0(K, \mathbb{R})$, il existe une fonction $g \in A^0(X)$ telle que $f(x) = g(x)$ pour tout point $x \in \Sigma$; si, de plus, $f \in A^0(X)_K$, on peut supposer $g \in A^0(X)_K$.*

Démonstration. Soit $K' \subset X$ un domaine k -analytique compact tel que $K \subset K' - \partial K'$. Soit, pour tout point $x \in \Sigma$, V_x un voisinage k -affinoïde connexe de x dans K , V_x et V_y étant disjoints si $x \neq y$. Notant V la réunion des V_x , $x \in \Sigma$, les propositions 3.1.21 et 3.1.22 garantissent l'existence d'une (unique) fonction g , continue sur X , harmonique sur $X - (\partial V \cup \partial K \cup \partial K')$ et telle que :

- $g|_{\partial V_x} = f(x)$ pour tout $x \in \Sigma$;
- $g|_{\partial K} = f|_{\partial K}$;
- $g|_{X-K'} = 0$.

La fonction g est lisse et, pour tout $x \in \Sigma$, sa restriction à V_x est constante en vertu du principe du maximum. On a donc $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Sigma$ et g appartient à $A^0(X)_K$ si et seulement si f appartient à $C^0(X, \mathbb{R})_K$. \square

COROLLAIRE 3.2.9. — *Le sous-espace $A^0(X)$ est dense dans l'espace de Fréchet $C^0(X, \mathbb{R})$.*

Démonstration. L'application linéaire canonique $C_c^0(X, \mathbb{R}) \rightarrow C^0(X, \mathbb{R})$ est continue – car l'espace d'arrivée est localement convexe et ses restrictions aux sous-espaces $C^0(X, \mathbb{R})_K$ sont continues – et d'image dense ; la densité de $A_c^0(X)$ dans $C^0(X, \mathbb{R})$ en découle immédiatement.

On peut aussi directement utiliser le lemme précédent. \square

Convenons enfin de munir les espaces vectoriels $A_c^0(X)$ et $A_c^1(X)$ des topologies localement convexe limites inductives des topologies vectorielles canoniques sur les espaces de dimension finie $A_c^0(X)_S$ et $A_c^1(X)_S$, où S parcourt l'ensemble des parties finies de $I(X)$,

$$A_c^0(X)_S = A_c^0(X) \cap \Gamma(X - S, \mathcal{H}_X)$$

et

$$A_c^1(X)_S = \{\omega \in A^1(X) ; \text{Supp}(\omega) \subset S\} = \bigoplus_{x \in S} \mathbb{R} \delta_x.$$

Ce sont les plus fines des topologies localement convexes séparées sur ces espaces vectoriels, caractérisées par le fait que toute application linéaire à valeurs dans un espace vectoriel localement convexe est continue. En particulier, les espaces vectoriels duaux au sens algébrique et au sens topologique sont les mêmes.

3.2.3. Fonctorialités.

Soient X, Y deux courbes strictement k -analytiques lisses et $p : Y \rightarrow X$ un morphisme.

Fonctorialités pour \mathcal{A}^0 .

Vu la définition des faisceaux \mathcal{A}_X^0 et \mathcal{A}_Y^0 , la proposition 2.3.19 montre que l'homomorphisme $p^* : \mathcal{C}_X^0 \rightarrow p_* \mathcal{C}_Y^0$ envoie le sous-faisceau \mathcal{A}_X^0 dans le sous-faisceau $p_* \mathcal{A}_Y^0$.

Lorsque le morphisme p est *fini*, donc *plat*, il existe également un homomorphisme $p_* : p_* \mathcal{A}_Y^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^0$ tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset X$ et toute section φ de \mathcal{A}_Y^0 sur $p^{-1}(\Omega)$:

$$(p_* \varphi)(x) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\deg_y p) \varphi(y).$$

Cela découle en effet de la description du faisceau \mathcal{A}_X^0 obtenue à la proposition 3.2.5. l'homomorphisme de *norme* : $N_p : p_* \mathcal{O}_Y^\times \rightarrow \mathcal{O}_X^\times$ définit un homomorphisme p_* du préfaisceau $p_* \mathbb{R} \log |\mathcal{O}_Y^\times|$ dans le préfaisceau $\mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X^\times|$ sur le G-site de X tel que, pour tout domaine k -analytique $V \subset X$, toute fonction $g \in \mathcal{O}_X(V)^\times$ et tout point $x \in V$,

$$p_* \log |g|(x) = \log |N_p(g)|(x) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\deg_y p) \log |g|(y)$$

(corollaire 2.1.9). Posant

$$\mathcal{F}_X = \mathbb{R} \log |\mathcal{O}_X^\times| \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_Y = \mathbb{R} \log |\mathcal{O}_Y^\times|$$

et notant $(p_* \mathcal{F}_Y)'$ le faisceau sur X_G associé au préfaisceau $p_* \mathcal{F}_Y$, cet homomorphisme se prolonge canoniquement en un homomorphisme de faisceaux

$$p_* : (p_* \mathcal{F}_Y)' \rightarrow \mathcal{A}_X^0$$

et il suffit de vérifier que l'homomorphisme canonique

$$(p_* \mathcal{F}_Y)' \rightarrow p_* \mathcal{A}_Y^0$$

est un isomorphisme de faisceaux. On constate qu'il induit un isomorphisme entre les fibres en tout point x de X puisque

$$(p_* \mathcal{F}_Y)'_x = (p_* \mathcal{F}_Y)_x = (\mathcal{F}_Y)_{p^{-1}(x)} = \bigoplus_{y \in p^{-1}(x)} (\mathcal{F}_{Y,x} = \bigoplus_{y \in p^{-1}(x)} \mathcal{A}_{Y,x}^0.$$

L'homomorphisme p_* ainsi obtenu de $p_* \mathcal{A}_Y^0$ dans \mathcal{A}_X^0 est tel que

$$(p_* \varphi)(x) = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\deg_y p) \varphi(y)$$

pour toute section φ de $p_* \mathcal{A}_Y^0$ au voisinage de x .

L'endomorphisme $p_* p^*$ du faisceau \mathcal{A}_X^0 est la multiplication par $(\deg p)$.

Fonctorialités pour \mathcal{A}^1 .

Quel que soit le point $x \in I(X)$, la fibre $p^{-1}(x)$ du morphisme p est un sous-ensemble localement fini de $I(Y)$ et le morphisme de germes $(Y, y) \rightarrow (X, x)$ induit par p est fini : en effet, l'image d'un morphisme constant est un point appartenant à $X - I(X)$ et la fibre de p au-dessus d'un point x de $I(X)$ est non vide si et seulement si p est fini au voisinage de $p^{-1}(x)$. Nous posons alors :

$$p^* \delta_x = \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\deg_y p) \delta_y.$$

Ceci permet d'associer au morphisme p un homomorphisme $p^* : \mathcal{A}_X^1 \rightarrow p_* \mathcal{A}_Y^1$ ainsi défini : pour tout ouvert $\Omega \subset X$, une section ω de \mathcal{A}_X^1 s'écrit sous la forme

$$\omega = \sum_{x \in I(\Omega)} a(x) \delta_x,$$

a étant une fonction réelle sur $I(\Omega)$ s'annulant en dehors d'un sous-ensemble localement fini, et $p^* \omega$ est la section

$$\sum_{x \in I(\Omega)} a(x) p^* \delta_x = \sum_{y \in I(p^{-1}(\Omega))} (\deg_y p) a(p(y)) \delta_y$$

de \mathcal{A}_Y^1 sur $p^{-1}(\Omega)$.

Le morphisme p envoie $I(Y)$ dans $I(X)$ s'il est *quasi-fini* ; sous cette condition, l'image directe au sens des mesures définit un homomorphisme $p_* : p_* \mathcal{A}_Y^1 \rightarrow \mathcal{A}_X^1$: pour tout ouvert $\Omega \subset X$ et tout point $y \in I(p^{-1}(\Omega))$,

$$p_* \delta_y = \delta_{p(y)}.$$

Lorsque p est fini, donc plat, l'endomorphisme $p_* p^*$ du faisceau \mathcal{A}_X^1 est la multiplication par $(\deg p)$.

3.2.4. L'opérateur dd^c .

Il est maintenant temps d'introduire un « opérateur de Laplace »

$$dd^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^1,$$

analogue non archimédien du laplacien complexe usuel $dd^c = \partial \bar{\partial} / i\pi$ auquel la proposition 3.2.4 ôte tout mystère !

THÉORÈME 3.2.10. — *Il existe une manière et une seule de définir, pour toute extension non archimédienne K/k et toute courbe strictement K -analytique lisse X , un homomorphisme de faisceaux $dd^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_Y^0$ satisfaisant aux deux conditions suivantes.*

(i) *Quelles que soient l'extension non archimédienne K'/K et la section φ de \mathcal{A}_X^0 sur un ouvert $\Omega \subset X$,*

$$dd^c \varphi = (p_{K'/K})_* dd^c p_{K'/K}^* \varphi.$$

Le second membre est l'image directe de la mesure $dd^c p_{K'/K}^ \varphi$ par la projection canonique $p_{K'/K}$ de $X \hat{\otimes}_K K'$ sur X .*

(ii) *Quels que soient la $\mathrm{Spf}(K^\circ)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} et l'isomorphisme j de \mathcal{Y}_η sur un domaine K -analytique compact $Y \subset X$,*

$$dd^c(\Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}) = j_* dd^c \Phi$$

dans $\Gamma(Y - \partial Y, \mathcal{A}_Y^1)$ pour toute fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}))$.

Démonstration. Considérons une extension non archimédienne K/k et une courbe strictement K -analytique lisse X . Soient x un point dans $I(X)$ et Y un voisinage strictement K -affinoïde de x dans X . Pour toute fonction $\varphi \in A^0(Y)$, la proposition 3.2.4 garantit l'existence d'une extension finie (séparable) K'/K ainsi que d'une $\mathrm{Spf}(K'^\circ)$ -courbe simplement nodale \mathcal{Y} , de fibre générique $Y \otimes_K K'$, telles que la fonction $\varphi' = \varphi \otimes 1$ s'écrive $\Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}$, avec $\Phi = \varphi'_{|S(\mathcal{Y})} \in A^0(S(\mathcal{Y}))$. Notons les deux faits suivants :

a) *quelle que soit l'extension non archimédienne K''/K' ,*

$$dd^c \Phi = (p_{K''/K'})_* dd^c p_{K''/K'}^* \Phi$$

(où $p_{K''/K'}$ est le morphisme canonique $Y \widehat{\otimes}_K K'' \rightarrow Y \otimes_K K'$) en vertu de la proposition 2.2.21 et du point 4 de la remarque 1.2.8 ;

b) pour tout éclatement admissible $q : \mathcal{Y}' \rightarrow \mathcal{Y}$ tel que \mathcal{Y}' soit une $\mathrm{Spf}(K'^{\circ})$ -courbe simplement semi-stable,

$$\mathrm{dd}^c \Phi = (q_\eta)_* \mathrm{dd}^c q_\eta^* \Phi$$

en vertu de la proposition 2.2.26.

Vérifions que le nombre réel

$$\int_{\{x\} \otimes_K K'} \mathrm{dd}^c \Phi$$

ne dépend que du germe de φ au point x .

Étant données une extension finie (séparable) K''/K et une $\mathrm{Spf}(K''^{\circ})$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Z} telles que :

- $Z = \mathcal{Z}_\eta$ soit un voisinage de $\{x\} \otimes_K K''$ dans $Y \otimes_K K''$,
- $\varphi|_Z = \Psi \circ \tau_Z$, avec $\Psi \in A^0(\mathcal{S}(\mathcal{Z}))$,

considérons une extension finie L de K coiffant K' et K'' . L'application de la proposition 2.2.27 à l'immersion canonique $Z \otimes_{K''} L \hookrightarrow Y \otimes_K L$, couplée aux remarques a) et b) qui précèdent, fournit l'égalité

$$\int_{\{x\} \otimes_K K''} \mathrm{dd}^c \Psi = \int_{\{x\} \otimes_K K'} \mathrm{dd}^c \Phi.$$

À ce stade, nous disposons, pour tout point $x \in \mathrm{I}(X)$, d'une application linéaire

$$\mathrm{dd}_x^c : \mathcal{A}_{X,x}^0 \rightarrow \mathcal{A}_{X,x}^1 = \mathbb{R} \delta_x,$$

uniquement caractérisée par l'égalité

$$\mathrm{dd}^c \varphi = \left(\int_{\{x\} \otimes_K K'} \mathrm{dd}^c \Phi \right) \delta_x,$$

chaque fois que le couple (K', \mathcal{X}) et la fonction Φ vérifient les conditions de l'énoncé de la proposition 3.2.4.

Quelle que soit la section φ de \mathcal{A}_X^0 sur un ouvert $\Omega \subset X$, l'ensemble des points $x \in \mathrm{I}(Y)$ tels que $\mathrm{dd}_x^c \varphi \neq 0$ est localement fini ; nous désignons alors par $\mathrm{dd}^c \varphi$ l'élément

$$\sum_{x \in \mathrm{I}(X)} \mathrm{dd}_x^c \varphi$$

de $A_X^1(\Omega)$.

L'homomorphisme $\mathrm{dd}^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^1$ que l'on vient de définir satisfait aux deux conditions de l'énoncé (le point (i) découlant de la remarque a) ci-dessus) et c'est clairement le seul. \square

COROLLAIRE 3.2.11

- (i) Le noyau de l'homomorphisme $\mathrm{dd}^c : \mathcal{A}_X^0 \rightarrow \mathcal{A}_X^1$ est le faisceau \mathcal{H}_X .
- (ii) Pour tout point $x \in \mathrm{I}(X)$ et tout germe $\varphi \in \mathcal{A}_{X,x}^0$ admettant un minimum local strict en x ,

$$\int_{\{x\}} \mathrm{dd}^c \varphi > 0.$$

- (iii) Quel que soit l'ouvert Ω de X , l'application \mathbb{R} -linéaire $\mathrm{dd}^c : A^0(\Omega) \rightarrow A^1(\Omega)$ envoie le sous-espace $A_c^0(\Omega)$ dans $A_c^1(\Omega)$.

Démonstration.

- (i) C'est une conséquence immédiate du théorème précédent et de la définition 2.3.1.
- (ii) Il suffit d'observer que, pour toute S -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} dont la fibre générique est un voisinage de x et toute fonction $\Phi \in A^0(S(\mathcal{Y}))$, la fonction $\varphi = \Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}$ a un minimum local strict au point x si et seulement si tel est le cas pour Φ .
- (iii) Étant donnée une fonction $\varphi \in A_c^0(\Omega)$ dont le support est contenu dans un domaine k -analytique compact $Y \subset X$, il existe un sous-ensemble fini S de $I(Y)$ tel que $\varphi|_Y \in A_S^0(Y)$ et le support de la mesure $\mathrm{dd}^c \varphi$ est contenu dans S . \square

PROPOSITION 3.2.12. — *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert ; pour toutes fonctions lisses $\varphi_1 \in A_c^0(\Omega)$ et $\varphi_2 \in A^0(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} \varphi_1 \, \mathrm{dd}^c \varphi_2 = \int_{\Omega} \varphi_2 \, \mathrm{dd}^c \varphi_1.$$

Démonstration. Supposant Ω connexe, considérons un domaine strictement k -analytique compact $Y \subset \Omega$ tel que :

- le support de φ_1 soit contenu dans $Y - \partial Y$ si la courbe Ω n'est pas propre,
- $Y = \Omega$ si la courbe Ω est propre.

Soient k'/k une extension finie et \mathcal{Y} une $\mathrm{Spf}(k'^{\circ})$ -courbe simplement semi-stable telles qu'il existe des fonctions $\Phi_1, \Phi_2 \in A^0(S(\mathcal{Y}))$ vérifiant $\mathcal{Y}_{\eta} = Y \otimes_k k'$ et $(\varphi_i)|_{Y \otimes_k k'} = \Phi_i \circ \tau_{\mathcal{Y}}$, $i = 1, 2$. Appliquant la proposition 1.2.13 et le théorème 3.2.10, il vient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \varphi_1 \, \mathrm{dd}^c \varphi_2 &= \int_Y \varphi_1 \, \mathrm{dd}^c \varphi_2 \\ &= \int_{S(\mathcal{Y})} \Phi_1 \, \mathrm{dd}^c \Phi_2 \\ &= \int_{S(\mathcal{Y})} \Phi_2 \, \mathrm{dd}^c \Phi_1 \\ &= \int_Y \varphi_2 \, \mathrm{dd}^c \varphi_1 = \int_{\Omega} \varphi_2 \, \mathrm{dd}^c \varphi_1. \end{aligned}$$

\square

Le comportement fonctoriel de l'opérateur dd^c s'obtient facilement à partir de sa définition et de la formule précédente.

PROPOSITION 3.2.13. — *Soient X, Y deux courbes strictement k -analytiques lisses et $p : Y \rightarrow X$ un morphisme.*

- (i) *Le diagramme*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_X^0 & \xrightarrow{\mathrm{dd}^c} & \mathcal{A}_X^1 \\ p^* \downarrow & & \downarrow p^* \\ p_* \mathcal{A}_Y^0 & \xrightarrow{\mathrm{dd}^c} & p_* \mathcal{A}_Y^1 \end{array}$$

est commutatif.

(ii) Lorsque p est fini et plat, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} p_* \mathcal{A}_Y^0 & \xrightarrow{\text{dd}^c} & p_* \mathcal{A}_Y^1 \\ p_* \downarrow & & \downarrow p_* \\ \mathcal{A}_X^0 & \xrightarrow{\text{dd}^c} & \mathcal{A}_X^1 \end{array}$$

est commutatif.

Démonstration.

(i) Quel que soit le point x dans $I(X)$, la fibre de p au-dessus de x est un sous-ensemble localement fini de $I(Y)$, non vide si et seulement si p est fini au voisinage de $p^{-1}(x)$. Vu la définition des homomorphismes p^* , il s'agit de prouver que, pour tout $y \in p^{-1}(x)$,

$$\int_{\{y\}} \text{dd}^c p^* \varphi = (\deg_y p) \int_{\{x\}} \text{dd}^c \varphi.$$

Quitte à remplacer la courbe Y par la courbe Y' , réunion des composantes irréductible de Y sur lesquelles le morphisme p est non-constant, on peut supposer que les fibres du morphisme p sont finies.

Le morphisme p est fini au voisinage de y ; appliquant la proposition 2.2.27, il existe une extension finie (séparable) k'/k et des $\text{Spf}(k'^o)$ -courbes simplement semi-stables \mathcal{X}, \mathcal{Y} telles que :

- \mathcal{X}_η (resp. \mathcal{Y}_η) soit un voisinage de $\{x\} \otimes_k k'$ (resp. de $\{y\} \otimes_k k'$) dans $X \otimes_k k'$ (resp. $Y \otimes_k k'$) ;
- p induise un morphisme de $S(\mathcal{Y})$ dans $S(\mathcal{X})$;
- $\varphi|_{\mathcal{X}_\eta} = \Phi \circ \tau_{\mathcal{X}}$, avec $\Phi \in A^0(S(\mathcal{X}))$.

Dans ces conditions, $(p^* \varphi)|_{\mathcal{Y}_\eta} = (p^* \Phi) \circ \tau_{\mathcal{Y}}$ et

$$\begin{aligned} \int_{\{y\}} \text{dd}^c \varphi &= \int_{\{y\} \otimes_k k'} \text{dd}^c (p^* \Phi) \\ &= \left(\sum_{y' \in \{y\} \otimes_k k'} \deg_{y'} p \right) \int_{\{p(y')\}} \text{dd}^c \Phi \\ &= (\deg_y p) \int_{\{x\} \otimes_k k'} \text{dd}^c \Phi \\ &= (\deg_y p) \int_{\{x\}} \text{dd}^c \varphi. \end{aligned}$$

(ii) Soient $\Omega \subset X$ un ouvert et φ une fonction dans $\Gamma(p^{-1}(\Omega), \mathcal{A}_X^0)$; quelle que soit la fonction $\psi \in A_c^0(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\int_X \psi \, dd^c p_* \varphi &= \int_X p_* \varphi \, dd^c \psi \\
&= \sum_{x \in I(X)} \sum_{y \in p^{-1}(x)} (\deg_y p) \varphi(y) \int_{\{x\}} dd^c \psi \\
&= \sum_{y \in I(Y)} \varphi(y) (\deg_y p) \int_{\{p(y)\}} dd^c \psi \\
&= \int_{p^{-1}(\Omega)} \varphi \, p^*(dd^c \psi) \\
&= \int_{p^{-1}(\Omega)} \varphi \, dd^c p^* \psi \\
&= \int_{p^{-1}(\Omega)} p^* \psi \, dd^c \varphi,
\end{aligned}$$

et l'on a ainsi établi l'égalité

$$dd^c p_* \varphi = p_* dd^c \varphi$$

dans l'espace de mesures $A^1(\Omega)$. □

Remarque 3.2.14. — L'homomorphisme $dd^c : A_c^0(X) \rightarrow A_c^1(X)$ est continu relativement aux topologies introduites sur ces espaces vectoriels à la fin du paragraphe 3.2.2. L'espace vectoriel topologique $A_c^1(X)$ étant localement convexe, il suffit en effet de vérifier la continuité de la restriction à $A_c^0(X)_S$, S étant une partie finie de $I(X)$; celle-ci équivaut à la continuité de $dd^c : A_c^0(X)_S \rightarrow A_c^1(X)_S$, qui est triviale puisque les deux espaces vectoriels sont de dimension finie.

3.3. Courants et fonctions de Green

L'objet de cette section est l'introduction des espaces de courants naturels permettant l'étude de l'opérateur dd^c .

3.3.1. Les espaces de courants

Rappelons que l'on a introduit une structure d'espace vectoriel topologique localement convexe sur $A_c^0(X)$ et $A_c^1(X)$ (cf. fin du paragraphe 3.2.2).

DÉFINITION 3.3.1. — *Quel que soit l'ouvert Ω de X , les courants de degré 0 (resp. de degré 1) sont les éléments de l'espace vectoriel $D^0(\Omega)$ (resp. $D^1(\Omega)$), dual topologique de l'espace vectoriel $A_c^1(\Omega)$ (resp. $A_c^0(\Omega)$).*

Les espaces vectoriels $D^0(X)$ et $D^1(X)$ sont munis de la structure d'espace vectoriel topologique localement convexe définie par la topologie faible.

Remarque 3.3.2. — Les topologies sur $A_c^0(X)$ et $A_c^1(X)$ sont telles que toute application linéaire à valeurs dans un espace vectoriel topologique localement convexe soit continue; les espaces $D^0(X)$ et $D^1(X)$ sont donc également les duals au sens algébrique.

PROPOSITION 3.3.3. — *L'application linéaire*

$$\iota : D^0(X) \rightarrow \text{Hom}(I(X), \mathbb{R}), \quad T \mapsto (x \mapsto \langle T, \delta_x \rangle)$$

réalise un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques lorsque $\text{Hom}(I(X), \mathbb{R})$ est muni de la topologie de la convergence simple.

Démonstration. Par construction, $A_c^1(\Omega)$ est l'espace vectoriel réel sur l'ensemble $I(\Omega)$; ι est donc un isomorphisme d'espaces vectoriels réels. Pour obtenir qu'il s'agit d'un isomorphisme des structures topologiques, il suffit d'observer qu'un système fondamental de voisinages de 0 dans $D^0(X)$ (resp. dans $\text{Hom}(I(X), \mathbb{R})$) est formé des

$$V(\omega_1, \dots, \omega_n; \varepsilon) = \{T \in D^0(X) ; |\langle T, \omega_i \rangle| \leq \varepsilon, 1 \leq i \leq n\},$$

où $\omega_1, \dots, \omega_n \in A_c^1(X)$ et $\varepsilon > 0$ (resp. des

$$W(S; \varepsilon') = \{f \in \text{Hom}(I(X), \mathbb{R}) ; \max_S |f| \leq \varepsilon'\},$$

où S est une partie finie de $I(X)$ et $\varepsilon' > 0$) ; puisque

$$W(\delta_x; \varepsilon') = V(\delta_x; \varepsilon')$$

pour tous $x \in I(X)$, $\varepsilon' > 0$ et

$$V(\omega; \varepsilon) \subset W(\text{Supp}(\omega); \varepsilon / \int_X |\omega|),$$

pour tous $\omega \in A_c^1(X)$, $\varepsilon > 0$, où $|\omega|$ est la valeur absolue de ω , la topologie faible sur $D^0(X)$ coïncide bien avec la topologie de la convergence simple sur $I(X)$. \square

L'homomorphisme canonique $C^0(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow D^0(\Omega)$ est la restriction à $I(\Omega)$; c'est une *injection* puisque $I(\Omega)$ est un sous-ensemble partout dense de Ω .

L'opérateur $dd^c : A_c^0(\Omega) \rightarrow A_c^1(\Omega)$ induit par dualité une application \mathbb{R} -linéaire

$$dd^c : D^0(\Omega) \rightarrow D^1(\Omega)$$

s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A^0(\Omega) & \xrightarrow{dd^c} & A^1(\Omega) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^0(\Omega) & \xrightarrow{dd^c} & D^1(\Omega) \end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections canoniques (c'est une reformulation de la proposition 3.2.12).

PROPOSITION 3.3.4. — *L'application linéaire $dd^c : D^0(X) \rightarrow D^1(X)$ est continue.*

Démonstration. Cela se constate immédiatement sur la formule

$$\langle dd^c T, \varphi \rangle = \langle T, dd^c \varphi \rangle,$$

$T \in D^0(X)$, $\varphi \in A_c^0(X)$, qui définit le prolongement de dd^c à l'espace $D^0(X)$. \square

Le résultat suivant jouera le rôle d'un énoncé d'existence de partition de l'unité dans $A_c^0(X)$ (remarquer que, puisque le produit de deux fonctions lisses n'est en général pas une fonction lisse, l'existence d'une partition de l'unité dans $A_c^0(X)$ n'implique pas la décomposition de toute fonction lisse).

LEMME 3.3.5. — Soient X une courbe strictement k -analytique lisse et \mathcal{U} un recouvrement ouvert ; étant donnée une fonction lisse $\varphi \in A_c^0(X)$, il existe un raffinement localement fini \mathcal{V} de \mathcal{U} et des fonctions lisses $\varphi_V \in A_c^0(X)$, $V \in \mathcal{V}$, telles que :

- (i) $\text{Supp}(\varphi_V) \subset V$ pour tout $V \in \mathcal{V}$;
- (ii) $\inf_X \varphi \leq \varphi_V \leq \sup_X \varphi$ pour tout $V \in \mathcal{V}$;
- (iii)

$$\varphi = \sum_{V \in \mathcal{V}} \varphi_V.$$

Démonstration. Quitte à raffiner le recouvrement \mathcal{U} , nous pouvons supposer qu'il est localement fini et que tous les ouverts le composant sont connexes et relativement compacts.

Première étape. Nous allons montrer qu'il existe un recouvrement ouvert localement fini \mathcal{V} de X tel que :

- pour tout $V \in \mathcal{V}$, ∂V soit un sous-ensemble fini de $I(X)$ et \overline{V} soit contenu dans l'un des ouverts $U \in \mathcal{U}$;
- chaque point de

$$S = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \partial V$$

soit contenu dans un unique $V \in \mathcal{V}$;

- la fonction φ soit harmonique sur $X - S$.

Quitte à raffiner le recouvrement \mathcal{U} , nous pouvons supposer qu'il est constitué d'ouverts U tels que ∂U soit en ensemble fini de points de type (2). Fixons en effet $U_0 \in \mathcal{U}$; le fermé

$$F_0 = \Omega - \bigcup_{U \in \mathcal{U}, U \neq U_0} U$$

est contenu dans U_0 et il existe un domaine strictement k -affinoïde $Y_0 \subset U_0$ tel que

$$F_0 \subset Y_0 - \partial Y_0.$$

On obtient un raffinement \mathcal{U}' de \mathcal{U} en remplaçant U_0 par $U'_0 = Y_0 - \partial Y_0$. Appliquant le même raisonnement à chacun des ouverts $U_{1,1}, \dots, U_{1,n} \in \mathcal{U}$ reconstruit U'_0 – il n'y en a qu'un nombre fini –, on obtient des ouverts $U'_0, U'_{1,1}, \dots, U'_{1,n}$ tels que $\partial U'_{1,i} \subset I(X)$ pour tout i et $\{U_0, U'_{1,1}, \dots, U'_{1,n}\} \cup (\mathcal{U} - \{U_0, U_{1,1}, \dots, U_{1,n}\})$ soit un recouvrement de Ω raffinant \mathcal{U} ; raisonnant par récurrence transfinie, on obtient de la sorte un raffinement \mathcal{U}' de \mathcal{U} tel que l'adhérence de chaque ouvert $U' \in \mathcal{U}'$ soit contenu dans un ouvert $U \in \mathcal{U}$ et son bord soit un ensemble fini de points de type (2). La réunion S_0 des $\partial U'$, $U' \in \mathcal{U}'$ est un ensemble localement fini de points de type (2) qu'il est loisible d'agrandir en un ensemble localement fini de points de type (2) S tel que, de plus, la fonction φ soit harmonique sur $X - S$.

Quels que soient l'ouvert $U' \in \mathcal{U}'$ et la composante connexe C de $X - S$,

$$C \cap U' = C \cap \overline{U'}$$

puisque $\partial U' = \overline{U'} - U'$ est contenu dans S . Ceci implique donc $C \subset U'$ ou $C \cap U' = \emptyset$. Soit alors, pour tout point $x \in S$, Ω_x la réunion des composantes connexes de $X - S$ qui sont adhérentes à x ; c'est un voisinage de x qui, d'après ce que l'on vient de dire, est contenu dans chacun des ouverts $U' \in \mathcal{U}'$ contenant x .

La famille $\mathcal{V} = \{\Omega_x\}_{x \in S}$ est un recouvrement ouvert localement fini de Ω qui raffine le recouvrement \mathcal{U}' ; S est la réunion des $\partial \Omega_x$, $x \in S$, et un point y de S appartient à l'ouvert Ω_x si et seulement si $y = x$. Ce recouvrement satisfait à toutes les propriétés requises.

Seconde étape. Il ne reste plus grand chose à faire maintenant. Soit, pour tout $v \in \mathcal{V}$, φ_V la fonction continue sur \overline{V} et harmonique sur V qui s'annule identiquement sur ∂V et coïncide avec φ sur $S \cap V$. Elle se prolonge naturellement en un élément de $A_c^0(X)$, encore noté φ_V , identiquement nul en dehors de V . Tout point x de S étant contenu dans un unique ouvert V de \mathcal{V} , la fonction

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} \varphi_V \in A_c^0(X)$$

est égale à φ sur S ; le principe du maximum implique par conséquent l'identité

$$\varphi = \sum_{V \in \mathcal{V}} \varphi_V.$$

Le support de chacune des fonctions φ_V est contenu dans un ouvert de \mathcal{U} et les inégalités du point (ii) sont évidentes.

La démonstration du lemme est achevée. \square

PROPOSITION 3.3.6. — *Pour toute courbe strictement k -analytique lisse X , la correspondance $\Omega \mapsto D^i(\Omega)$ est un faisceau sur l'espace topologique X , $i \in \{0, 1\}$.*

Démonstration. L'assertion est triviale pour $i = 0$ en vertu de l'identification canonique $D^0(\Omega) = \text{Hom}(I(\Omega), \mathbb{R})$.

Le cas $i = 1$ se traite via un argument de « partition de l'unité » fondé sur le lemme précédent.

Il s'agit de montrer, pour tout ouvert $\Omega \subset X$ et tout recouvrement ouvert \mathcal{U} de Ω , qu'un 0-cocycle de Čech $\underline{\rho} = (\rho_U)$ sur \mathcal{U} à valeurs dans le préfaisceau D^1 est le cobord d'un élément $\rho \in D^1(\Omega)$.

Soient φ une fonction dans $A_c^0(X)$ et \mathcal{V} un raffinement de \mathcal{U} tel que la conclusion du lemme précédent soit vérifiée. Le nombre réel

$$\sum_{V \in \mathcal{V}} \langle \rho_V, \varphi_V \rangle$$

ne dépend pas du choix de \mathcal{V} ; il existe donc un et un seul courant ρ de degré 1 sur X tel que, pour toute fonction lisse $\varphi \in A_c^0(X)$ et tout recouvrement ouvert \mathcal{V} raffinant \mathcal{U} et vérifiant la conclusion du lemme précédent,

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \sum_{V \in \mathcal{V}} \langle \rho_V, \varphi_V \rangle;$$

il vérifie la condition $\rho|_U = \rho_U$ pour tout ouvert $U \in \mathcal{U}$ et est donc le courant cherché. \square

3.3.2. Fonctions de Green élémentaires

L'étude de l'opérateur dd^c commence par la construction de fonctions lisses particulières.

PROPOSITION 3.3.7. — *Soit X une courbe strictement k -analytique lisse.*

(i) *Si X est propre et connexe, il existe, pour tous points $x, y \in I(Y)$, une unique fonction lisse $g_{x,y} \in A^0(X)$ telle que*

$$\begin{cases} dd^c g_{x,y} = \delta_y - \delta_x \\ g_{x,y}(x) = 0. \end{cases}$$

La fonction

$$I(X)^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto g_{x,y}(y)$$

est symétrique.

(ii) Quels que soient le domaine k -affinoïde connexe $V \subset X$ et le point $x \in I(V) - \partial V$, il existe une unique fonction lisse $g_x^V \in A^0(X)_V$ qui s'annule identiquement sur ∂V et telle que le support de la mesure $\nu_x^V = dd^c g_x^V + \delta_x$ soit contenu dans ∂V .

La fonction g_x^V est strictement positive sur $V - \partial V$.

Démonstration.

(i) Supposons la courbe X propre et connexe. Quels que soient les points $x, y \in I(X)$, l'ouvert $\Omega = X - \{x, y\}$ est relativement compact et il existe, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, une unique fonction $h_\lambda \in C^0(X, \mathbb{R})$ harmonique sur Ω et telle que $h_\lambda(x) = 0$, $h_\lambda(y) = \lambda$ (propositions 3.1.19 et 3.1.20). C'est une fonction lisse et la mesure $dd^c h_\lambda$ s'écrit $c(\lambda)(\delta_y - \delta_x)$ (corollaire 3.2.11, (i) et proposition 3.2.12).

Les seules fonctions harmoniques sur X étant les fonctions constantes, h_λ n'est pas harmonique si $\lambda \neq 0$; l'application linéaire

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad c(\lambda) = \int_{\{x\}} dd^c h_\lambda$$

est donc un isomorphisme. Il existe ainsi un unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $c(\lambda) = 1$.

La symétrie de la fonction $I(X)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g_{x,y}(y)$ se déduit immédiatement de la proposition 3.2.12 :

$$\begin{aligned} g_{x,y}(y) - g_{y,x}(x) &= \int_X g_{x,y} \delta_y - \int_X g_{y,x} \delta_x \\ &= - \int_X g_{x,y} (\delta_x - \delta_y) + \int_X g_{y,x} (\delta_y - \delta_x) \\ &= - \int_X g_{x,y} dd^c g_{y,x} + \int_X g_{y,x} dd^c g_{x,y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii) Soient V un domaine k -affinoïde connexe de X et $x \in I(V) - \partial(V)$. L'espace vectoriel $C^0(V, \mathbb{R}) \cap \Gamma(V - (\partial V \cup \{x\}), \mathcal{H}_X)$ est isomorphe à $\text{Hom}(\partial V \cup \{x\}, \mathbb{R})$ via l'application de restriction (corollaire 3.1.21) et le sous-espace F constitué des fonctions identiquement nulles sur ∂V est une droite. La forme linéaire $F \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int_{\{x\}} dd^c \varphi$ est un isomorphisme (car non nulle) et il existe donc une unique fonction $g_x^V \in A^0(X)_V$ telle que

$$- \int_{\{x\}} dd^c g_x^V = -1;$$

$$- g_x^V \text{ s'annule identiquement sur } \partial V.$$

La mesure $\nu_x^V = dd^c g_x^V + \delta_x$ est à support dans ∂V .

La fonction g_x^V n'est pas identiquement nulle sur $V - \partial V$ (car non harmonique); puisqu'elle s'annule en tout point de ∂V , elle admet donc un extremum local strict dans $V - \partial V$. L'inégalité $(dd^c g_x^V)|_{V - \partial V} = -\delta_x \leq 0$ implique qu'il ne peut s'agir que d'un maximum par application du corollaire 3.2.11, (ii) : g_x^V est donc positive sur V . La stricte positivité sur $V - \partial V$ découle immédiatement de la connexité de V et de l'harmonicité de g_x^V sur $V - (\partial V \cup \{x\})$. \square

Remarque 3.3.8. — Nous étendrons ultérieurement le point (i) de la proposition précédente (théorème 3.3.13) tandis que la section 3.6 sera consacrée à la généralisation du point (ii).

COROLLAIRE 3.3.9. — Soit $V \subset X$ un domaine k -affinoïde connexe; reprenant les notations introduites dans la proposition 3.3.7 :

- (i) $g_x^V(y) = g_y^V(x)$ pour tous points $x, y \in I(V) - \partial V$;
(ii) pour toute fonction b sur ∂V , la fonction continue sur V et harmonique $V - \partial V$ qui coïncide avec b sur ∂V prend, au point x , la valeur

$$\int_{\partial V} b \, d\nu_x^V.$$

- (iii) Pour tout $x \in I(V) - \partial V$, ν_x^V est une mesure de probabilité dont le support est la frontière de la composante connexe de x dans $V - \partial V$.

Démonstration. Le point (i) découle directement de la proposition 3.2.12 et de la nullité de g_x^V, g_y^V sur ∂V :

$$g_x^V(y) = - \int_X g_x^V \, dd^c g_y^V = - \int_X g_y^V \, dd^c g_x^V = g_y^V(x).$$

Soit $b \in \text{Hom}(\partial V, \mathbb{R})$ et soit h la fonction dans $H(V)$ qui coïncide avec b sur ∂V (corollaire 3.1.21) ; le support de la mesure $dd^c h$ est contenu dans ∂V et, appliquant de nouveau la proposition 3.2.12,

$$0 = \int_X g_x^V \, dd^c h = \int_V h \, dd^c g_x^V = \int_X h \, d\nu_x^V - h(x) = \int_{\partial V} b \, d\nu_x^V - h(x).$$

Le point (iii) se déduit immédiatement du précédent : quelle que soit en effet la fonction positive b sur ∂V , la fonction $h \in H(V)$ qui coïncide avec b sur ∂V est positive et donc

$$\int_{\partial V} b \, d\nu_x^V = h(x) \geq 0.$$

L'égalité $h(x) = 0$ est vérifiée si et seulement si h est identiquement nulle sur la composante connexe de x dans $V - \partial V$ (principe du maximum), d'où l'assertion sur le support de la mesure ν_x^V . Enfin, le cas de la fonction constante $b = 1$ montre que ν_x^V est de masse totale 1. \square

Nous sommes maintenant en mesure d'achever la démonstration de la proposition 3.1.3.

COROLLAIRE 3.3.10. — *Quel que soit l'ouvert $\Omega \subset X$, une famille localement bornée \mathcal{F} de fonctions harmoniques sur Ω est équicontinue en tout point : pour tout $x \in \Omega$ et tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans Ω tel que*

$$\sup_V |u - u(x)| \leq \varepsilon$$

pour toute fonction $u \in \mathcal{F}$.

Démonstration. Soient x un point de Ω et V un voisinage k -affinoïde connexe de x dans Ω . Etant donnée une fonction harmonique h sur Ω , le point (ii) du corollaire précédent fournit l'identité

$$h(x) = \int_{\partial V} h \, d\nu_x^V$$

et donc, pour tout point $y \in V - \partial V$,

$$|h(x) - h(y)| \leq \left(\sup_{\partial V} |h| \right) \sup_{\partial V} \int_V d|\nu_x^V - \nu_y^V|.$$

Appliquant cette formule aux fonctions $u \in \mathcal{F}$, il reste à prouver l'existence, pour tout réel $\varepsilon > 0$, d'un voisinage connexe W de x dans $V - \partial V$ tel que

$$\int_X d|\nu_x^V - \nu_y^V| \leq \varepsilon$$

pour tout point $y \in W$. Cela sera acquis si l'on établit, pour tout point $z \in \partial V$, la continuité de l'application

$$V - \partial V \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_{\{z\}} \mathrm{dd}^c g_y^V.$$

Quel que soit le point $t \in \mathrm{I}(V)$, la fonction réelle $y \mapsto g_y^V(t)$ sur $V - \partial V$ est continue. C'est trivial lorsque $t \in \partial V$ car c'est alors la fonction nulle. Si $t \in \mathrm{I}(V) - \partial V$, le point (i) du corollaire précédent montre que ce n'est pas autre chose que la fonction lisse g_t^V .

Soient finalement W un domaine k -affinoïde dans $V - \partial V$ et h une fonction dans $A^0(V)$, nulle sur $W \cup (\partial V - \{z\})$ et prenant la valeur 1 au point z (lemme 3.2.8). La formule

$$\int_{\{z\}} \mathrm{dd}^c g_y^V = \int_V h \mathrm{dd}^c g_y^V = \int_V g_y^V \mathrm{dd}^c h = \sum_{t \in \partial W \cup \partial V} g_y^V(t) \int_{\{t\}} \mathrm{dd}^c h,$$

pour tout point $y \in W - \partial W$, met en évidence la continuité de l'application

$$W - \partial W \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \int_{\{z\}} \mathrm{dd}^c g_y^V.$$

□

Il est bien connu que l'opérateur différentiel dd^c sur une surface de Riemann complexe est *elliptique*, propriété qui implique sa *régularité* : un courant T de degré 0 est défini par une fonction lisse si et seulement si le courant $\mathrm{dd}^c T$ est défini par une 2-forme différentielle lisse. Cette dernière assertion est également valable dans le contexte non archimédien.

PROPOSITION 3.3.11. — *L'image de l'injection canonique $A^0(X) \hookrightarrow D^0(X)$ est le sous-espace des courants T de degré 0 tels que $\mathrm{dd}^c T \in A^1(X)$.*

LEMME 3.3.12. — *L'injection canonique $A^0(X) \hookrightarrow D^0(X)$ induit un isomorphisme de $\Gamma(X, \mathcal{H}_X)$ sur $\ker \mathrm{dd}^c$.*

Démonstration. Vu la compatibilité de l'opérateur dd^c aux injections canoniques $A^0(X) \hookrightarrow D^0(X)$ et $A^1(X) \hookrightarrow D^1(X)$, l'inclusion

$$\Gamma(X, \mathcal{H}_X) \subset \ker(\mathrm{dd}^c : D^0(X) \rightarrow D^1(X))$$

est le point (i) du corollaire 3.2.11.

Soit $T \in D^0(X)$ un courant tel que $\mathrm{dd}^c T = 0$.

Considérons des domaines k -affinoïdes $V' \subset V$ dans X dont les bords de Shilov sont réduits à un point : $\Gamma(V) = \{y\}$ et $\Gamma(V') = \{y'\}$, avec $y, y' \in \mathrm{I}(X)$. Le point (ii) de la proposition 3.3.7 garantit l'existence d'une fonction $g_{y'}^V \in A_c^0(X)$ telle que

$$\begin{cases} \mathrm{dd}^c g_{y'}^V = \delta_y - \delta_{y'} \\ g_{y'}^V(y) = 0 ; \end{cases}$$

utilisant l'hypothèse $\mathrm{dd}^c T = 0$, il en découle

$$0 = \langle \mathrm{dd}^c T, g_{y'}^V \rangle = \langle T, \mathrm{dd}^c g_{y'}^V \rangle = T(y) - T(y').$$

Cette formule permet de prolonger la fonction $T : I(X) \rightarrow \mathbb{R}$ à l'espace X tout entier : un point $x \in X - I(X)$ admet en effet un système fondamental de voisinages constitué de domaines k -affinoïdes V ayant un unique point de Shilov et, si $\Gamma(V) = \{y\}$, il suffit de poser

$$T(x) = T(y).$$

Soient $V \subset X$ un domaine k -affinoïde et h l'unique fonction dans $H(V)$ dont la restriction à $\partial V \subset I(X)$ est égale à T ; invoquant de nouveau le point (ii) de la proposition 3.3.4, l'équation $dd^c T = 0$ implique, pour tout point $x \in I(V) - \partial V$,

$$0 = \langle dd^c T, g_x^V \rangle = \langle T, dd^c g_x^V \rangle = \int_{\partial V} T \, d\nu_x^V - T(x)$$

et donc $T(x) = h(x)$ (corollaire 3.3.9, (ii)).

Les fonctions h et $T|_V$ coïncident sur $I(V)$ et sont constantes au voisinage de chacun des points de $V - I(V)$: elles sont donc égales en vertu de la densité de $I(V)$ dans V .

Nous avons ainsi établi l'harmonicité de la fonction réelle T . \square

Démonstration de la proposition 3.3.11. Soit $T \in D^0(X)$ tel que $dd^c T$ soit une forme lisse ω sur X .

Étant donné un domaine k -analytique compact $Y \subset X$, il existe un sous-ensemble fini S de $I(Y) \subset I(X)$ contenant ∂Y et tel que $\omega|_Y$ appartienne à l'espace $A_S^1(Y)$. La restriction de T à une composante connexe Ω de $Y - S$ vérifiant l'équation $dd^c T|_\Omega = 0$, le lemme précédent fournit une fonction harmonique h_Ω sur Ω coïncidant avec T sur $I(\Omega)$. La fonction réelle φ_Y sur Y telle que $\varphi_Y = T$ sur S et $\varphi_Y = h_\Omega$ sur chaque composante connexe Ω de $Y - S$ est une fonction lisse.

Il est clair qu'il existe une unique fonction lisse $\varphi \in A^0(X)$ telle que $\varphi|_Y = \varphi_Y$ pour tout domaine k -analytique compact $Y \subset X$; cette fonction coïncide avec T sur $I(X)$. \square

Nous sommes désormais en mesure de résoudre l'équation $dd^c T = \rho$ pour tous courants $T \in D^0(X)$ et $\rho \in D^1(X)$ dans le cas d'une courbe connexe X vérifiant l'une des conditions suivantes :

- X est isomorphe à l'analytifiée d'une k -courbe algébrique ;
- X est isomorphe à la composante connexe de l'intérieur d'un espace strictement k -affinoïde.

Remarquons que le premier cas envisagé englobe en particulier celui où la courbe X est *propre* puisque toute courbe k -analytique propre et connexe est isomorphe à l'analytifiée d'une k -courbe algébrique ([3], 3.4.14).

THÉORÈME 3.3.13. — *Soit X une courbe strictement k -analytique lisse, connexe et vérifiant l'une des conditions suivantes :*

- X est isomorphe à l'analytifiée d'une k -courbe algébrique ;
- X est isomorphe à une composante connexe de l'intérieur d'un domaine k -affinoïde.

L'image de l'application $dd^c : D^0(X) \rightarrow D^1(X)$ est

- (i) *l'espace $D^1(X)$ tout entier si X n'est pas propre ;*
- (ii) *l'hyperplan $\{\rho \in D^1(X) \mid \langle \rho, 1 \rangle = 0\}$ si X est propre.*

Démonstration.

(ii) Traitons tout d'abord le cas d'une courbe strictement k -analytique lisse, propre et connexe ; comme on l'a précédemment observé, une telle courbe est isomorphe à l'analytifiée d'une k -courbe algébrique propre et lisse en vertu de la proposition 3.4.14 de [3]. L'inclusion

$$dd^c D^0(X) \subset \{\rho \in D^1(X) \mid \langle \rho, 1 \rangle = 0\}$$

est évidente ; réciproquement, étant donné un courant $\rho \in D^1(X)$ tel que $\langle \rho, 1 \rangle = 0$, fixons un point $x \in I(X)$ et considérons la fonction réelle T sur $I(X)$ définie par

$$T(y) = \langle \rho, g_{x,y} \rangle,$$

$g_{x,y}$ étant l'élément de $A^0(X)$ caractérisé par les conditions

$$\begin{cases} dd^c g_{x,y} = \delta_y - \delta_x \\ g_{x,y}(x) = 0 \end{cases}$$

(proposition 3.3.7, (i)).

Quelle que soit la fonction lisse $\varphi \in A^0(X)$, l'élément

$$\tilde{\varphi} = \int_X g_{x,y} (dd^c \varphi)(y) = \sum_{y \in I(X)} \left(\int_{\{y\}} dd^c \varphi \right) g_{x,y}$$

de $A^0(X)$ vérifie l'équation $dd^c \tilde{\varphi} = dd^c \varphi$; $\varphi - \tilde{\varphi}$ est par conséquent une fonction harmonique sur X , donc constante, et l'on obtient la formule intégrale

$$\varphi = \varphi(x) + \int_X g_{x,y} (dd^c \varphi)(y).$$

Nous pouvons maintenant conclure : pour toute fonction $\varphi \in A^0(X)$,

$$\begin{aligned} \langle \rho, \varphi \rangle &= \langle \rho, \varphi(x) + \int_X g_{x,y} (dd^c \varphi)(y) \rangle = \varphi(x) \langle \rho, 1 \rangle + \int_X \langle \rho, g_{x,y} \rangle (dd^c \varphi)(y) \\ &= \int_X T dd^c \varphi = \langle T, dd^c \varphi \rangle \end{aligned}$$

et donc $dd^c T = \rho$.

(i) Considérons maintenant une courbe strictement k -analytique lisse et connexe X , isomorphe à l'analytifiée d'une k -courbe algébrique affine ou à une composante connexe de l'intérieur d'un espace k -affinoïde. Nous vérifierons un peu plus loin que ces hypothèses garantissent que X est la réunion d'une suite (V_n) de domaines strictement k -affinoïdes dans X telle que, pour tout n :

- $V_n \subset V_{n+1} - V_n$;
- la frontière de chacune des composantes connexes C de $V_{n+1} - V_n$ est telle que $\text{Card}(\partial C \cap V_n) = \text{Card}(\partial C \cap V_{n+1}) = 1$.

Tenant ceci pour acquis, il est facile de conclure la démonstration du théorème.

Première étape. Remarquons tout d'abord que, pour tout n et toute composante connexe C de $V_{n+1} - V_n$, l'espace vectoriel $\Gamma(C - \partial C, \mathcal{H}_X)$ est de dimension 2. Étant donnée une fonction $h \in H(V_n)$, il existe, pour toute composante connexe C de $V_{n+1} - V_n$, une unique fonction continue h_C sur \overline{C} qui soit harmonique sur $C - \partial C$, coïncide avec h au point z de $\partial V_n \cap \partial C$ et telle que

$$\int_{\{z\}} dd^c h_C = - \int_{\{z\}} dd^c h ;$$

la fonction h' sur V_{n+1} définie par :

$$h' = \begin{cases} h & \text{sur } V_n \\ h_C & \text{sur la composante connexe } C \text{ de } V_{n+1} - V_n \end{cases}$$

appartient alors à l'espace $H(V_{n+1})$. Nous venons d'établir la surjectivité de l'application de réduction

$$H(V_{n+1}) \rightarrow H(V_n).$$

Seconde étape. Soit maintenant ρ un courant dans $D^1(X)$. Nous considérons une suite (V_n) de domaines strictement k -affinoïdes qui satisfait aux conditions formulées plus haut et un point x dans $I(V_0) - \partial V_0$. Utilisant les notations introduites à la proposition 3.3.7, définissons pour tout entier naturel n une fonction \tilde{T}_n sur $I(V_n) - \partial V_n$ en posant

$$\tilde{T}_n(y) = -\langle \rho, g_y^{V_n} \rangle.$$

Quels que soient $n > m$ et la fonction lisse $\varphi \in A_c^0(X)$ dont le support est contenu dans V_m ,

$$\varphi(y) = - \int_X \varphi \, dd^c g_y^{V_n} = - \int_X g_y^{V_n} \, dd^c \varphi$$

pour tout point $y \in V_n - \partial V_n$. Par application de la formule de symétrie

$$g_y^{V_n}(z) = g_z^{V_n}(y),$$

$y, z \in V_n - \partial V_n$ (corollaire 3.3.9 (i)), nous obtenons la formule intégrale

$$\varphi = - \int_X g_y^{V_n} (dd^c \varphi)(y)$$

dans $A^0(X)$.

Pour tout couple (m, n) d'entiers naturels tel que $n > m$ découle de ce qui précède l'égalité

$$\langle \rho, \varphi \rangle = \langle \tilde{T}_n, dd^c \varphi \rangle,$$

$\varphi \in A^0(X)_{V_m}$, et donc l'identité des courants $dd^c \tilde{T}_n$ et ρ sur $V_n - \partial V_n$.

Définissons maintenant par récurrence une suite (T_n) , $T_n \in D^0(V_n - \partial V_n)$:

- $T_0 = \tilde{T}_0$;
- pour tout $n \geq 0$, $T_{n+1} = \tilde{T}_{n+1} - h'_n$, où h'_n est une fonction dans $H(V_{n+1})$ qui prolonge la fonction $h_n \in H(V_n)$ définie par la formule

$$(\tilde{T}_{n+1})|_{V_n - \partial V_n} = T_n + h_n.$$

Pour tout n , $dd^c T_n = \rho|_{V_n - \partial V_n}$ et $T_{n+1} - |V_n - \partial V_n| = T - n$; il existe donc un et un seul $T \in D^0(X)$ tel que

$$T|_{V_n - \partial V_n} = T - n$$

pour tout n , et ce courant satisfait à l'équation

$$dd^c T = \rho.$$

La démonstration du théorème sera complète lorsqu'on aura établi que X est la limite d'une suite de domaines strictement k -affinoïdes vérifiant les propriétés énoncées plus haut.

Lorsque X est isomorphe à une composante connexe de l'intérieur d'un domaine k -affinoïde, cela est le contenu de la proposition 2.2.23.

Vérifions-le ensuite lorsque X est isomorphe à l'analytifiée d'une k -courbe algébrique affine. Écrivons X sous la forme $X = \overline{X} - Z$, où \overline{X} est (isomorphe à l'analytifiée d') une k -courbe propre et régulière et Z est un ensemble fini de points x tels que $[\kappa(x) : k] < \infty$. Chaque $x \in Z$ admet un système fondamental dénombrable de voisinages constitué de domaines strictement k -affinoïdes $W_{x,n}$ ayant un seul point de Shilov et tels que $W_{x,n+1} \subset W_{x,n} - \partial W_{x,n}$. Notons $\Omega_{x,n}$ la composante connexe de $W_{x,n} - \partial W_{x,n}$ contenant x et soit

$$V_n = \overline{X} - \bigcup_{x \in Z} \Omega_{x,n}.$$

Pour tout n , V_n est un domaine strictement k -affinoïde de X , $V_n \subset V_{n+1} - \partial V_{n+1}$ et

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= \bigcup_{x \in Z} (X - \Omega_{x,n+1}) \cap (X - V_n) \\ &= \bigcup_{x \in Z} \Omega_{x,n} \cap (\overline{X} - \Omega_{x,n+1}). \end{aligned}$$

Les composantes connexes de $V_{n+1} - V_n$ sont les $C_x = \Omega_{x,n} \cap (\overline{X} - \Omega_{x,n+1})$, $x \in Z$, et

$$\partial C_x = \partial \Omega_{n,x} \cup \partial \Omega_{x,n+1}$$

rencontre bien V_n (resp. V_{n+1}) en un seul point.

La démonstration du théorème est maintenant achevée. \square

3.3.3. La formule de Poincaré-Lelong

Illustrons enfin l'utilisation de l'opérateur dd^c au sens des courants en démontrant la formule de *Poincaré-Lelong* sur une courbe strictement k -analytique lisse X .

Notant X_0 l'ensemble des points $x \in X$ tels que $[\kappa(x) : k] < \infty$, le groupe des 0-cycles sur X est par définition le sous-groupe $Z_0(X)$ du groupe abélien $\mathrm{Hom}(X_0, \mathbb{Z})$ constitué des fonctions dont le support est *localement fini*. L'élément $(x \mapsto n_x)_{x \in X_0}$ de $Z_0(X)$ se note classiquement sous la forme

$$\sum_{x \in X_0} n_x [x].$$

À tout point $x \in X_0$ est associée une mesure atomique $\delta_{[x]}$ sur X , définie par

$$\delta_{[x]} = [\kappa(x) : k] \delta_x.$$

On obtient, par linéarité, une application

$$Z_0(X) \rightarrow D^1(X), \quad D \mapsto \delta_D$$

telle que, pour tout 0-cycle D sur X dont le support est fini,

$$\int_X 1 \delta_D = \deg(D).$$

Étant donnée une fonction méromorphe régulière (i.e. inversible sur un ouvert dense) f sur X , les points $x \in X$ tels que $f(x) = 0$ ou $f^{-1}(x) = 0$ forment un sous-ensemble localement fini de X et appartiennent tous à X_0 . Puisque X est supposée lisse, le (0-cycle associé au) diviseur de f est l'élément de $Z_0(X)$ défini par la formule usuelle :

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{x \in X_0} \mathrm{ord}_x(f) [x].$$

Plus généralement, tout sous-espace strictement k -analytique fermé et nulle part dense Y de X détermine un élément $[Y]$ de $Z_0(X)$, défini par

$$[Y] = \sum_{x \in X_0} \lg(\mathcal{O}_{Y,x}) [x].$$

Remarque 3.3.14. — Quelle que soit l'extension non archimédienne K/k , la fibre du morphisme canonique $p_K : X \hat{\otimes}_k K \rightarrow X$ au-dessus d'un point x de X_0 est un sous-ensemble fini de $(X \hat{\otimes}_k K)_0$. Il existe donc un et un seul homomorphisme de groupes abélien $p_K^* : Z_0(X) \rightarrow Z_0(X \hat{\otimes}_k K)$ tel que

$$p_K^*[x] = [p_K^*(x)]$$

(cycle associé à l'espace K -analytique $p_K^{-1}(x)$).

La vérification des deux propriétés suivantes est triviale :

- pour tout $D \in Z_0(X)$, $\delta_D = (p_K)_* \delta_{p_K^* D}$;
- pour toute fonction méromorphe régulière f sur X , $p_K^* f$ est une fonction méromorphe régulière sur $X \widehat{\otimes}_k K$ et

$$\operatorname{div}(p_K^* f) = p_K^* \operatorname{div}(f)$$

dans $Z_0(X \widehat{\otimes}_k K)$.

PROPOSITION 3.3.15. — Formule de Poincaré-Lelong

Quelle que soit la fonction méromorphe régulière f sur X , le courant $\log |f|$ satisfait à l'équation

$$\operatorname{dd}^c \log |f| - \delta_{\operatorname{div}(f)} = 0.$$

Démonstration. Il s'agit d'établir la formule

$$\int_X \log |f| \operatorname{dd}^c \varphi = \int_X \varphi \delta_{\operatorname{div}(f)}$$

pour toute fonction $\varphi \in A_c^0(X)$.

Soient donc $\varphi \in A_c^0(X)$ et $Y \subset X$ un domaine strictement k -analytique compact tel que $Y - \partial Y$ contienne le support de φ . La forme lisse $\operatorname{dd}^c \varphi$ est portée par un ensemble fini S de points de $I(Y) - \partial Y$ et il existe donc, en vertu du lemme 2.2.22, une extension finie (séparable) k'/k et une $\operatorname{Spf}(k'^o)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} , de fibre générique $Y \otimes_k k'$, telles que la fonction $p_{k'}^* \varphi$ soit harmonique sur $Y \otimes_k k' - S(\mathcal{Y})$ ($p_{k'}$ est la projection canonique $X \otimes_k k' \rightarrow X$).

Les identités

$$\operatorname{dd}^c \varphi = (p_{k'})_* \operatorname{dd}^c p_{k'}^* \varphi$$

(théorème 3.2.10) et

$$\delta_{\operatorname{div}(f)} = (p_{k'})_* \delta_{\operatorname{div}(p_{k'}^* f)}$$

(remarque précédente) permettent de supposer $k' = k$.

Dans ces conditions, $\varphi = \Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}$ et

$$\int_X \log |f| \operatorname{dd}^c \varphi = \int_{S(\mathcal{Y})} F \operatorname{dd}^c \Phi = \int_{S(\mathcal{Y})} \Phi \operatorname{dd}^c F = \int_{S(\mathcal{Y}) - \partial Y} \Phi \operatorname{dd}^c F,$$

F étant la restriction de $\log |f|$ à $S(\mathcal{Y})$. Nous pouvons maintenant appliquer le point (iii) de la proposition 2.2.24 pour obtenir

$$\begin{aligned} \int_X \log |f| \operatorname{dd}^c \varphi &= \int_{S(\mathcal{Y}) - \partial Y} \Phi \operatorname{dd}^c F \\ &= \sum_{x \in S(\mathcal{Y}) - \partial Y} \Phi(x) \int_{\tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(x)} \delta_{\operatorname{div}(f)} \\ &= \sum_{x \in S(\mathcal{Y})} \int_{\tau_{\mathcal{Y}}^{-1}(x)} \varphi \delta_{\operatorname{div}(f)} \\ &= \int_X \varphi \delta_{\operatorname{div}(f)}. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.3.16. — Rappelons que, par convention, la notation \log désigne le logarithme népérien (ou naturel). Il peut être utile d'observer ici que l'opérateur dd^c dépend implicitement de cette convention, via la définition de la structure entière sur les polyèdres $S(|a|)$ (2.2.1).

3.4. Fonctions sous-harmoniques et mesures de Radon positives

Nous poursuivons dans cette section l'étude des fonctions sous-harmoniques sur une courbe strictement k -analytique lisse X , définies en 3.1.2, à l'aide de l'opérateur dd^c . Les notations introduites dans l'énoncé de la proposition 3.3.7 seront librement employées.

3.4.1. Le théorème d'approximation.

En vertu de la proposition 3.4.10, une fonction sous-harmonique u sur X définit une fonction réelle sur $I(X)$ et détermine par conséquent un courant dans $D^0(X)$.

LEMME 3.4.1. — *L'application*

$$\mathcal{SH}(X) \rightarrow D^0(X), \quad u \mapsto u|_{I(X)}$$

est injective et son image est l'ensemble des courants $T \in D^0(X)$ satisfaisant à la condition suivante :

pour tout domaine k -affinoïde $V \subset X$ et tout point $x \in I(V) - \partial V$,

$$T(x) \leq \langle T, \nu_x^V \rangle.$$

Démonstration. Soient u une fonction sous-harmonique sur X et x un point dans $X - I(X)$.

Étant donnée une suite décroissante (V_n) de domaines k -affinoïdes de X dont le bord de Shilov $\Gamma(V_n)$ est réduit à un point x_n et telle que

$$\{x\} = \bigcap_n V_n,$$

le principe du maximum (proposition 3.1.11) implique les inégalités $u|_{V_n} \leq u(x_n)$; la suite $(u(x_n))$ est donc décroissante et $u(x) \leq \inf_n u(x_n)$. D'autre part, en vertu de la semi-continuité supérieure de u ,

$$u(x) \geq \limsup_n u(x_n) = \inf_n u(x_n).$$

La fonction u est ainsi uniquement déterminée par sa restriction au sous-ensemble $I(X)$ de X .

La description de l'image de l'application $\mathcal{SH}(X) \rightarrow D^0(X)$ est une application directe du point (ii) du corollaire 3.3.9. \square

Le lemme précédent nous permettra de ne pas distinguer une fonction sous-harmonique sur X du courant de degré 0 qu'elle détermine.

Une fonction sous-harmonique sur une surface de Riemann est, localement, l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de fonctions sous-harmoniques lisses ([19], Theorem 2.5.5). Cette assertion est également vraie dans un contexte non archimédien, la démonstration en étant qui plus est élémentaire.

THÉORÈME 3.4.2. — *Soient Ω un ouvert d'une courbe strictement k -analytique lisse X et $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$. Pour tout ouvert relativement compact $\Omega' \subset \Omega$, la restriction de u à Ω' est l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de fonctions sous-harmoniques lisses.*

Démonstration. On peut supposer que l'ouvert relativement compact $\Omega' \subset \Omega$ est de la forme $Y - \partial Y$, $Y \subset X$ étant un domaine k -analytique compact.

Étant donné un sous-ensemble fini $S \subset I(Y)$ contenant ∂Y , découle des propositions 3.1.19 et 3.1.20 l'existence d'une unique fonction u_S appartenant à $A^0(Y)$, harmonique sur $Y - S$ et coïncidant avec u sur S .

La sous-harmonicité de u sur $Y - S$ implique l'inégalité $u|_Y \leq u_S$; par suite, pour tout sous-ensemble fini S' de $I(Y)$ contenant S , u_S majore $u_{S'}$ sur le bord S' de $Y - S'$ et $u_{S'} \leq u_S$, en vertu du principe du maximum (proposition 3.1.1) appliqué aux fonctions u_S et $u_{S'}$, harmoniques sur $Y - S'$. La famille $(u_S)_S$ est donc décroissante.

La fonction lisse u_S est sous-harmonique sur $Y - \partial Y$. Soient en effet $V \subset Y - \partial Y$ un domaine k -affinoïde et h une fonction dans $H(V)$ qui majore u_S sur ∂V . Puisque $u|_Y \leq u_S$, h majore *a fortiori* u sur ∂V , et donc sur tout V par sous-harmonicité ; comme u et u_S coïncident sur S , il s'ensuit que h majore u sur le bord $S'' = (S \cap V) \cup \partial V$ de l'ouvert $V - S''$. Une nouvelle application du principe du maximum aux fonctions harmoniques $h|_{V-S''}$ et $(u_S)|_{V-S''}$ fournit alors l'inégalité

$$u_S \leq h$$

sur V .

La famille $(u_S)_S - S$ parcourant l'ensemble filtrant des parties finies de $I(Y)$ contenant ∂Y - est minorée en tout point de $I(X)$; son enveloppe inférieure \underline{u} est donc une fonction sous-harmonique sur X (proposition 3.1.8). La démonstration s'achève en invoquant le lemme 3.4.1 : les fonctions sous-harmoniques \underline{u} et $u|_{Y-\partial Y}$, trivialement égales sur $I(Y) - \partial Y$, sont identiques. \square

Remarque 3.4.3. — La démonstration ci-dessus s'adapte aisément dans un contexte archimédien et permet de démontrer un résultat d'approximation *global* pour les fonctions sous-harmoniques sur une surface de Riemann (voir la proposition 4.2.14).

La caractérisation des fonctions sous-harmoniques lisses est sans surprise.

PROPOSITION 3.4.4. — *Une fonction lisse $\varphi \in A^0(X)$ sur une courbe strictement k -analytique lisse X est sous-harmonique si et seulement si $\mathrm{dd}^c \varphi \geq 0$.*

Démonstration. Soit φ une fonction dans $A^0(X)$ telle que $\mathrm{dd}^c \varphi \geq 0$.

Soient $V \subset X$ un domaine k -affinoïde et h une fonction dans $H(V)$ qui majore φ sur ∂V ; il est suffisant, pour prouver l'inégalité

$$\varphi|_V \leq h,$$

d'établir que $\varphi|_V$ est majorée par la fonction h' dans $H(V)$ qui coïncide avec φ sur ∂V (car $h' \leq h$ d'après le principe du maximum).

L'inégalité $\mathrm{dd}^c(h' - \varphi) = -\mathrm{dd}^c \varphi \leq 0$ sur $V - \partial V$ implique que la fonction $h' - \varphi$ n'a pas de minimum local strict sur $V - \partial V$ (corollaire 3.2.11, (ii)) ; elle atteint donc son minimum en un point de ∂V et, puisque $(h' - \varphi)|_{\partial V} = 0$,

$$\varphi|_V \leq h'.$$

La fonction φ est ainsi sous-harmonique sur X .

Soit réciproquement $\varphi \in A^0(X)$ une fonction lisse et sous-harmonique. Étant donné un point x du support S de $\mathrm{dd}^c \varphi$, considérons un domaine k -affinoïde $V \subset X$ tel que $S \cap (V - \partial V) = \{x\}$ et soit h la fonction $h \in H(V)$ qui est égale à φ sur S . La fonction $\varphi|_V - h$ est négative et elle s'annule identiquement sur ∂V .

La forme lisse $(\mathrm{dd}^c(\varphi - h))|_{V-\partial V} = (\mathrm{dd}^c \varphi)|_{V-\partial V}$ est, par hypothèse, non nulle et portée par $\{x\}$. La première condition implique l'existence d'un minimum local strict pour la fonction $(\varphi - h)|_{V-\partial V}$ et celui-ci est nécessairement réalisé en un point $y \in I(Y) - \partial Y$ car $\varphi - h$ est localement constante en tout point de $Y - I(Y)$. On en déduit l'inégalité

$$\int_{\{y\}} \mathrm{dd}^c \varphi > 0$$

par application du point (ii) du corollaire 3.2.11 et donc $y = x$, $(dd^c\varphi)|_{V-\partial V} \geq 0$.

Ceci établit la positivité de la forme lisse $dd^c\varphi$. \square

COROLLAIRE 3.4.5. — *Soient X une courbe strictement k -analytique lisse, K/k une extension non archimédienne et $p_K : X \widehat{\otimes}_k K \rightarrow X$ la projection canonique ; étant donnée une fonction sous-harmonique u sur X , la fonction p_K^*u est sous-harmonique sur $X \widehat{\otimes}_k K$.*

Démonstration. Puisqu'il est loisible de raisonner localement, nous pouvons, en vertu du théorème 3.4.2, supposer que u est l'enveloppe inférieure d'une famille (φ_λ) de fonctions sous-harmoniques lisses. La fonction p_K^*u est alors l'enveloppe inférieure de la famille de fonctions lisses $p_K^*\varphi_\lambda$ et il suffit donc de traiter le cas d'une fonction sous-harmonique lisse.

Soit u une fonction sous-harmonique lisse et vérifions que la mesure $dd^c p_K^*u$ est positive. La formule

$$dd^c p_K^*u = p_{K'/K*} dd^c p_{K'}^*u$$

pour toute extension non archimédienne K'/K (théorème 3.2.10) permet d'agrandir K à loisir. Considérons un domaine strictement k -affinoïde $Y \subset X$ et une extension finie k'/k telle que $Y \otimes_k k'$ soit isomorphe à la fibre générique d'une $\mathrm{Spf}(k'^o)$ -courbe simplement semi-stable \mathcal{Y} et que la fonction $p_{k'}^*u$ s'écrive sous la forme $U \circ \tau$, avec $U \in A^0(S(\mathcal{Y}))$ (proposition 3.2.4) ; la sous-harmonicité de u implique celle de U puisque $dd^c U = dd^c u$ (théorème 3.2.10). Soient maintenant K' une extension non archimédienne de k coiffant K et k' et $p : S(\mathcal{Y})_{K'} \rightarrow S(\mathcal{Y})$ l'application induite par la projection canonique de $X \widehat{\otimes}_k K'$ sur $X \otimes_k k'$. La fonction p^*U est sous-harmonique sur $S(\mathcal{Y})_K$ et il en est par conséquent de même pour $p_{K'}^*u = p^*U \circ \tau_{K'}$.

Comme mentionné au début de la démonstration, la sous-harmonicité de $p_{K'}^*u$ implique celle de p_K^*u . \square

L'utilisation simultanée du théorème d'approximation et de la caractérisation des fonctions sous-harmoniques lisses permet également de répondre à une question naturelle mentionnée à la remarque 3.1.7.

PROPOSITION 3.4.6. — *Soient \mathcal{X} une S -courbe simplement semi-stable et u une fonction sous-harmonique sur \mathcal{X}_η ;*

- *la restriction U de u au squelette $S(\mathcal{X})$ de \mathcal{X} est une fonction réelle sous-harmonique (= convexe) continue ;*
- *$u \leq U \circ \tau_{\mathcal{X}}$.*

Démonstration. L'inégalité $u \leq U \circ \tau_{\mathcal{X}}$ est une conséquence immédiate du principe du maximum puisque les fibres de la rétraction $\tau_{\mathcal{X}}$ sont des domaines k -affinoïdes dont le bord est réduit à un point.

La restriction U de u au squelette $S(\mathcal{X})$ est à valeurs finies car $S(\mathcal{X}) \subset I(\mathcal{X}_\eta)$ et, compte tenu du théorème 3.4.2, U est l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de fonctions qui sont les restrictions de fonctions lisses et sous-harmoniques sur \mathcal{X}_η . Il est par conséquent suffisant de prouver qu'une fonction lisse et sous-harmonique φ sur \mathcal{X}_η se restreint en une fonction affine par morceaux et sous-harmonique sur le polyèdre $S(\mathcal{X})$.

Nous pouvons supposer la courbe quasi-compacte puisque la question est locale sur $S(\mathcal{X})$; l'assertion sera d'autre part démontrée si elle l'est après passage à une extension finie k' de k . Appliquant la proposition 3.2.4 et le lemme 2.2.22, il existe dans ces conditions un éclatement admissible $q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tel que :

- \mathcal{Y} soit une S -courbe simplement semi-stable,
- $\varphi = \Phi \circ \tau_{\mathcal{Y}}$, avec $\Phi = \varphi|_{S(\mathcal{Y})} \in A^0(S(\mathcal{Y}))$.

La fonction Φ est sous-harmonique puisque $dd^c \Phi = dd^c \varphi \geq 0$ (théorème 3.2.10).

D'après la proposition 2.2.26, $S(\mathcal{X})$ est un domaine polyédral dans $S(\mathcal{Y})$ tel que chaque composante connexe de $S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{X})$ n'ait qu'un seul point frontière. Il en découle tout d'abord que la restriction Φ' de φ à $S(\mathcal{X})$ est une fonction continue et affine par morceaux puisque $\Phi' = \Phi|_{S(\mathcal{X})}$. C'est en outre une fonction sous-harmonique : Φ est en effet décroissante au voisinage de la frontière de $S(\mathcal{Y}) - S(\mathcal{X})$ en vertu du principe du maximum, ce qui implique

$$\mathrm{dd}^c \Phi' \geq \mathrm{dd}^c \Phi \geq 0.$$

□

Remarque 3.4.7. — Réciproquement, étant donnée une S -courbe simplement semi-stable \mathcal{X} et une fonction sous-harmonique F sur $S(\mathcal{X})$, la fonction $\tau_{\mathcal{X}}^* F$ est évidemment sous-harmonique sur X : représentant F comme l'enveloppe inférieure d'une suite décroissante (Φ_n) de fonctions affines par morceaux et sous-harmoniques sur $S(\mathcal{X})$, $\tau_{\mathcal{X}}^* F$ est l'enveloppe inférieure de la suite des fonctions lisses et sous-harmoniques $\tau_{\mathcal{X}}^* \Phi_n$ (voir [32] pour l'utilisation de fonctions sur X définies via des (différences de) fonctions convexes sur les polyèdres $S(\mathcal{X})$).

3.4.2. Parties polaires.

Un sous-ensemble E d'une courbe strictement k -analytique lisse X est dit *polaire* s'il admet un recouvrement *dénombrable* par des ouverts connexes $\Omega \subset X$ sur lesquels existe une fonction $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ telle que $E \cap \Omega \subset \{u = -\infty\}$.

Remarque 3.4.8

1. La condition de dénombrabilité introduite dans cette définition est nécessaire à l'existence, pour toute partie polaire $E \subset X$, d'une fonction sous-harmonique globale sur X prenant la valeur $-\infty$ en tout point de E , ainsi qu'à une caractérisation *capacitaire* des parties polaires (théorème 3.6.11 et remarque 3.6.12).
2. La condition de dénombrabilité, jointe à la semi-continuité supérieure des fonctions sous-harmoniques, implique immédiatement que tout sous-ensemble polaire de X est contenu dans un *borélien* polaire.

Nous noterons $P(X)$ l'ensemble des points $x \in X$ tels que le singleton $\{x\}$ soit polaire ; il est clair que les parties polaires de X sont des sous-ensembles de $P(X)$.

Remarque 3.4.9. — Les deux propriétés suivantes se déduisent immédiatement de la proposition 3.1.14 :

1. Quel que soit le morphisme quasi-fini $f : Y \rightarrow X$, $f^{-1}(P(X)) \subset P(Y)$.
2. Pour toute extension non archimédienne K/k , $p_K^{-1}(P(X)) \subset P(X \hat{\otimes}_k K)$.

PROPOSITION 3.4.10. — *Pour toute courbe strictement k -analytique lisse X , $P(X)$ est exactement l'ensemble des points de X de type (1).*

Démonstration. Rappelons qu'un point x d'une courbe strictement k -analytique est de type (1) si l'extension non archimédienne $\mathcal{H}(x)/k$ se plonge dans la complétion d'une clôture algébrique de k . (2.1.3)

Tout point x de type (1) dans \mathbb{A}_k^1 est polaire : étant donnés une suite décroissante (E_n) de disques fermés dans \mathbb{A}_k^1 de limite $\{x\}$ et, pour tout n , un point $x_n \in E_n$ tel que l'extension $\kappa(x_n)/k$ soit finie, de polynôme minimal unitaire $f_n \in k[T]$, les fonctions

$$g_n = \frac{1}{\deg(f_n)} \log |f_n|$$

sont sous-harmoniques sur \mathbb{A}_k^1 et de la forme $\log |T| + o(1)$ à l'infini. La suite (g_n) est stationnaire sur chacun des ouvert $\mathbb{A}_k^1 - E_n$ et converge donc vers une fonction sous-harmonique g sur \mathbb{A}_k^1 telle que $g(x) = -\infty$.

Le cas d'un point x de type (1) sur une courbe strictement k -analytique X se déduit immédiatement de ce qui précède en utilisant un morphisme fini (de germes) $p : (X, x) \rightarrow (\mathbb{A}_k^1, p(x))$.

Les points de Shilov des domaines strictement k -affinoïdes d'une courbe strictement k -analytique lisse X ne sont pas polaires en vertu du lemme 3.1.9 et le second point de la remarque 3.4.9 implique donc qu'un point $x \in X$ est non polaire s'il existe une extension non archimédienne K/k telle que la fibre $p_K^{-1}(x)$ contienne le point de Shilov d'un domaine strictement k -affinoïde de $X \widehat{\otimes}_k K$, c'est-à-dire un point y tel que $s(y) = 1$. Étant donné un point x de X , le lemme 2.1.19 garantit l'existence d'un point y tel que $s(y) = 1$ dans la fibre de $X \widehat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ si et seulement si x n'est pas de type (1) ; il découle de cette observation que seuls les points de type (1) peuvent être polaires et ceci achève la démonstration de la proposition. \square

Remarque 3.4.11. — Poursuivant l'analogie entre éléments de $A^1(X)$ dans le cadre non archimédien et formes différentielles de type (1,1) sur une surface de Riemann M dans le cadre archimédien, la non polarité des points de $I(X)$ correspond au fait que les parties polaires de M sont de mesure de Lebesgue nulle.

3.4.3. Courants positifs.

Un courant S de degré 1 sur une courbe strictement k -analytique lisse X est *positif* si $\langle S, \varphi \rangle \geq 0$ pour toute fonction positive $\varphi \in A_c^0(X)$.

THÉORÈME 3.4.12. — *Quelle que soit la courbe strictement k -analytique lisse X ,*

(i) *les courants positifs de degré 1 sont les mesures de Radon positives sur l'espace topologique localement compact X ;*

(ii) *le cône réel $\mathcal{SH}(X) \subset D^0(X)$ des fonctions sous-harmoniques sur X est l'ensemble des $T \in D^0(X)$ tels que le courant $\mathrm{dd}^c T$ soit positif.*

Démonstration.

(i) Soient $\mu \in D^1(X)$ un courant positif et φ une fonction lisse dont le support est contenu dans un compact $E \subset X$.

Considérons des domaines k -analytiques compacts $Y, Y' \subset X$ tels que

$$E \subset Y' - \partial Y' \subset Y' \subset Y - \partial Y$$

et soit χ une fonction dans $A_c^0(X)$ telle que $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi|_{Y'} = 1$ et $\chi|_{X-Y} = 0$ (son existence découle du lemme 3.2.8). Les inégalités

$$-(\max_E |\varphi|)\chi \leq \varphi \leq (\max_E |\varphi|)\chi$$

et la positivité de μ impliquent la majoration

$$|\langle \mu, \varphi \rangle| \leq \langle \mu, \chi \rangle \max_E |\varphi|,$$

laquelle permet, grâce à la proposition 3.2.7, de prolonger la forme linéaire

$$\mu : A_c^0(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

en une forme linéaire continue et positive sur l'espace de Fréchet $C^0(X, \mathbb{R})$.

L'opération de restriction au sous-espace dense $A_c^0(X)$ de $C^0(X, \mathbb{R})$ réalise donc une bijection entre mesures de Radon positives sur X et courants de degré 1 positifs.

(ii) Le courant $\mathrm{dd}^c u$ est positif pour toute fonction sous-harmonique lisse u (proposition 3.4.4). Quelle que soit la fonction sous-harmonique u et la famille décroissante (u_λ) dans $\mathcal{SH}(X)$ qui converge vers u dans $D^0(X)$, le courant $\mathrm{dd}^c u$ est la limite dans $D^1(X)$ de la famille $(\mathrm{dd}^c u_\lambda)$ (proposition 3.3.4) ; appliquant ceci à une famille constituée de fonctions sous-harmoniques lisses (théorème 3.4.2), on en déduit que le courant $\mathrm{dd}^c u$ est bien positif.

L'assertion réciproque se déduit immédiatement de la caractérisation de $\mathcal{SH}(X)$ dans $D^0(X)$ donnée dans le lemme 3.4.1 : un courant $T \in D^0(X)$ tel que $\mathrm{dd}^c T \geq 0$ satisfait à la condition

$$\langle T, \nu_x^V \rangle - T(x) = \langle T, \mathrm{dd}^c g_x^V \rangle = \langle \mathrm{dd}^c T, g_x^V \rangle \geq 0$$

pour tout domaine k -affinoïde connexe $V \subset X$ et tout point $x \in I(V) - \partial V$ en vertu de la positivité de g_x^V (proposition 3.3.7, (ii)). \square

Couplé au théorème 3.3.13 et au lemme 3.3.12, le théorème précédent établit l'existence de *potentiels* pour les mesures de Radon positives (dans le cas d'une courbe non propre).

COROLLAIRE 3.4.13. — *Soit X une courbe strictement k -analytique lisse, connexe et isomorphe à une composante connexe de l'intérieur d'un espace k -affinoïde ou à l'analytifiée d'une courbe k -algébrique affine. L'application*

$$D^0(X) \rightarrow D^1(X), \quad T \mapsto \mathrm{dd}^c T$$

induit une bijection de $\mathcal{SH}(X)/\Gamma(X, \mathcal{H}_X)$ sur l'ensemble des mesures de Radon positives sur l'espace topologique localement compact $|X|$.

Considérons maintenant une courbe strictement k -analytique propre et lisse X et spécialisons ce qui précède dans le cas d'un ouvert connexe Ω de X tel que $\partial\Omega$ soit une partie non vide de $I(X)$.

LEMME 3.4.14. — *Il existe, pour tout point $x \in \Omega$, une unique fonction $g_x \in \mathcal{SH}(\Omega)$ telle que*

$$\begin{cases} \mathrm{dd}^c g_x = \delta_x \\ \lim_{y \in \Omega, y \rightarrow \zeta} g_x(y) = 0 \text{ pour tout } \zeta \in \partial\Omega \end{cases}$$

Démonstration. L'unicité découle du principe du maximum.

Supposons tout d'abord que le point x appartienne à $I(\Omega)$; quelle que soit la composante connexe c de $\Omega - \{x\}$, l'existence d'une barrière en tout point de ∂c (proposition 3.1.20) garantit l'existence, pour tout nombre réel λ , d'une unique fonction continue g_λ sur \overline{c} , harmonique sur c et telle que

$$\begin{cases} g_\lambda(x) = \lambda \\ g_\lambda = 0 \text{ sur } \partial c - \{x\} ; \end{cases}$$

on en déduit l'existence, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, d'une unique fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et lisse sur Ω qui s'annule sur $\partial\Omega$ et prend la valeur λ au point x ; on la note encore g_λ .

Les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ et harmoniques sur Ω s'annulant identiquement sur $\partial\Omega$ forment, d'après la discussion précédente, une droite vectorielle réelle E dans $A^0(\Omega)$; l'application linéaire

$$E \rightarrow \mathbb{R}, \quad g \mapsto \int_{\Omega} \mathrm{dd}^c g,$$

injective en vertu de l'identification du sous-espace $\Gamma(\Omega, \mathcal{H})$ de $A^0(\Omega)$ au noyau de l'opérateur dd^c (corollaire 3.2.11, (i)) et du principe du maximum, est par conséquent un isomorphisme. Il existe ainsi une unique fonction $g \in E$ telle que

$$\int_{\Omega} \mathrm{dd}^c g_\lambda = 1.$$

Tout point $x \in \Omega - I(\Omega)$ est contenu dans un domaine k -affinoïde $V \subset \Omega$ tel que $\Gamma(V)$ soit réduit à un point ; considérant un tel V et notant y son point de Shilov, il suffit de poser

$$g_x = g_y + g_{x,y},$$

où $g_{y,x}$ est le prolongement sous-harmonique de la solution dans $D^0(\Omega)$ de l'équation $\mathrm{dd}^c T = \delta_x - \delta_y$ qui prend la valeur $g_y(y)$ au point y de $I(\Omega)$ (théorèmes 3.3.13 et 3.4.12). \square

Remarque 3.4.15. — Quels que soient les points $x, y \in I(\Omega)$, les fonctions lisses g_x et g_y vérifient la relation de symétrie

$$g_x(y) = g_y(x).$$

Il en découle que, pour tout point $x \in \Omega$, la fonction sous-harmonique $g_x \in \mathcal{SH}(\Omega)$ est le prolongement du courant

$$I(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto g_y(x)$$

sur Ω . La relation de symétrie

$$g_x(y) = g_y(x)$$

est vérifiée (dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) pour tous $x, y \in \Omega$.

Étant donnée une mesure de Radon positive μ sur Ω , l'application

$$\Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 0} \cup \{-\infty\}, \quad x \mapsto \int_X g_x \, \mathrm{d}\mu$$

est notée g_μ .

PROPOSITION 3.4.16. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour toute mesure de Radon positive μ sur Ω :*

- (i) *il existe un point $x \in \Omega$ tel que $g_\mu(x) > -\infty$;*
- (ii) *la fonction $g_\mu(x)$ est sous-harmonique ;*
- (iii) *il existe une fonction $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ telle que $u \leq 0$ et $\mathrm{dd}^c u = \mu$.*

Lorsque ces conditions sont vérifiées :

- (iv) $\mathrm{dd}^c g_\mu = \mu$
- (v) $\limsup_{y \in \Omega, y \rightarrow \zeta} g_\mu(y) = 0$ pour tout $\zeta \in \partial\Omega$.

Démonstration. Soit V_n une suite croissante de domaines k -affinoïdes dont Ω est la réunion.

La fonction g_μ est l'enveloppe inférieure de la suite des fonctions $g_{\mu,n} \in \mathcal{SH}(V_n - \partial V_n)$ définies par

$$g_{\mu,n}(x) = \int_{V_n - \partial V_n} (-g_x^{V_n}) \, \mathrm{d}\mu = g_{\mu|_{V_n}}(x)$$

($x \in V_n - \partial V_n$). Cette suite est décroissante puisqu'il en est ainsi de suite des $(-g_x^{V_n})$ et g_μ est donc sous-harmonique sur Ω ou identiquement égale à $-\infty$. Ceci prouve l'équivalence des assertions (i) et (ii).

Si g_μ est sous-harmonique,

$$\langle g_\mu, \mathrm{dd}^c \varphi \rangle = \int_\Omega \langle g_x, \mathrm{dd}^c \varphi \rangle \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left(\int_\Omega g_y (\mathrm{dd}^c \varphi)(y) \right) \, \mathrm{d}\mu$$

en vertu des identités

$$\begin{aligned}
\langle g_x, \mathrm{dd}^c \varphi \rangle &= \sum_{y \in |\mathrm{dd}^c \varphi|} \left(\int_{\{y\}} \mathrm{dd}^c \varphi \right) g_x(y) \\
&= \sum_{y \in |\mathrm{dd}^c \varphi|} \left(\int_{\{y\}} \mathrm{dd}^c \varphi \right) g_y(x) \\
&= \left(\int_{\Omega} g_y (\mathrm{dd}^c \varphi)(y) \right) (x)
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega} g_y (\mathrm{dd}^c \varphi)(y) = \varphi$$

pour toute fonction $\varphi \in A_c^0(\Omega)$; par conséquent, $\mathrm{dd}^c g_\mu = \mu$ et le point (ii) implique donc les points (iii) et (iv).

Soit u une fonction sous-harmonique sur Ω telle que $\mathrm{dd}^c u = \mu$ et $u \leq 0$. Quel que soit le point $x \in I(\Omega)$,

$$g_\mu(x) = \int_{\Omega} g_x \, \mathrm{d}\mu = \inf_n \int_X (-g_x^{V_n}) \, \mathrm{d}\mu = -\sup_n \langle u, \mathrm{dd}^c g_x^{V_n} \rangle = u(x) - \sup_n \langle u, \nu_x^{V_n} \rangle$$

et, $\nu_x^{V_n}$ étant une mesure de probabilité,

$$g_\mu(x) \geq u(x).$$

Le point (iii) implique donc le point (i).

Démontrons enfin le point (v) lorsque g_μ est une fonction sous-harmonique.

Soit b la fonction sur $\partial\Omega$ définie par

$$b(\zeta) = (\limsup_{\Omega} g_\mu)(\zeta)$$

et soit h la fonction dans $C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \cap \Gamma(\Omega, \mathcal{H}_X)$ qui coïncide avec b sur $\partial\Omega$ (rappelons que, par hypothèse, tous les points de $\partial\Omega$ sont de type (2) ou (3)). L'inégalité évidente $b \leq 0$ implique $h \leq 0$ et la fonction sous-harmonique $\tilde{g}_\mu = g_\mu - h$ majore g_μ . D'un autre côté, \tilde{g}_μ est négative en vertu du principe du maximum et, pour tout $x \in I(\Omega) \cap (V_n - \partial V_n)$,

$$\tilde{g}_\mu(x) = \langle \tilde{g}_\mu, \nu_x^{V_n} - \mathrm{dd}^c g_x^{V_n} \rangle \leq -\langle \tilde{g}_\mu, \mathrm{dd}^c g_x^{V_n} \rangle = \int_{\Omega} (-g_x^{V_n}) \, \mathrm{d}\mu$$

car $\nu_x^{V_n}$ est une mesure de probabilité. Il reste à passer à la limite sur n pour obtenir

$$\tilde{g}_\mu(x) \leq g_\mu(x).$$

Les fonctions sous-harmoniques g_μ et \tilde{g}_μ coïncident sur $I(\Omega)$; elles sont donc égales en vertu du lemme 3.4.1, ce qui établit le point (v). \square

Les fonctions sous-harmoniques sur une courbe strictement k -analytique X propre et lisse étant constantes, il y a lieu d'introduire la définition suivante.

DÉFINITION 3.4.17. — Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur une courbe strictement k -analytique lisse X . Une métrique sous-harmonique $\|\cdot\|$ (resp. lisse) sur \mathcal{L} est la donnée, pour toute section inversible s de \mathcal{L} sur un ouvert Ω de X , d'une fonction

$$-\log \|s\| \in \mathcal{SH}(\Omega) \quad (\text{resp. } -\log \|s\| \in A^0(\Omega)),$$

la condition de compatibilité suivante étant vérifiée : pour tous ouverts $\Omega' \subset \Omega$ de X et toutes sections $s' \in \Gamma(\Omega', \mathcal{L}^\times)$, $s \in \Gamma(\Omega, \mathcal{L}^\times)$, $s|_{\Omega'} = fs'$ avec $f \in \Gamma(\Omega', \mathcal{O}_X^\times)$ et

$$-\log \|s\|_{\Omega'} = -\log \|s'\| - \log |f|.$$

On définit de même la notion de métrique continue, harmonique, etc.

Les fonctions sous-harmoniques u sur une courbe strictement k -analytique lisse X s'identifient canoniquement aux métriques sous-harmoniques $\|\cdot\|$ sur son faisceau structural via la relation $u = -\log \|1\|$.

Quel que soit le faisceau inversible \mathcal{L} sur X muni d'une métrique sous-harmonique (resp. lisse) $\|\cdot\|$, il existe un et un seul courant ρ de degré 1 sur X tel que, pour tout ouvert $\Omega \subset X$ et toute section inversible s de \mathcal{L} sur Ω , $\rho|_{\Omega} = \text{dd}^c \log \|s\|$ (rappelons que la correspondance $\Omega \rightarrow D^0(\Omega)$ est un faisceau sur X , proposition 3.3.6). Ce courant, noté $c_1(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$, est appelé la *courbure* du faisceau inversible métrisé $(\mathcal{L}, \|\cdot\|)$. C'est un courant positif si (et seulement si) la métrique est sous-harmonique, une forme lisse si (et seulement si) la métrique est lisse.

Il est maintenant possible d'énoncer l'analogue du corollaire 3.4.13.

COROLLAIRE 3.4.18. — *Il existe, pour toute mesure de Radon positive μ sur une courbe strictement k -analytique propre et lisse X , un faisceau inversible \mathcal{L} sur X muni d'une métrique sous-harmonique $\|\cdot\|$ et un nombre réel positif λ tels que*

$$\mu = \lambda c_1(\mathcal{L}, \|\cdot\|).$$

Démonstration. Considérons un point $x \in X$ tel que $[\kappa(x) : k] < \infty$ et soit \mathcal{L} le faisceau inversible ample $\mathcal{O}_X([x])$. Étant donnée une mesure de probabilité μ sur X , le théorème 3.3.13 fournit un courant $g \in D^0(X)$, uniquement déterminé à l'addition d'une constante près, tel que

$$\text{dd}^c g = [\kappa(x) : k] \mu - \delta_{[x]}.$$

Il existe alors, en vertu de la formule de Poincaré-Lelong (proposition 3.3.15) une unique métrique sous-harmonique $\|\cdot\|$ sur le faisceau inversible \mathcal{L} telle que

$$-\log \|1_{[x]}\| = g;$$

toujours grâce à la formule de Poincaré-Lelong, sa courbure est $[\kappa(x) : k] \mu$. □

Le théorème 3.4.2 se généralise sans difficulté au cas de faisceaux inversibles munis de métriques sous-harmoniques.

THÉORÈME 3.4.19. — *Soit \mathcal{L} un faisceau inversible sur une courbe strictement k -analytique propre et lisse. Pour toute métrique sous-harmonique $\|\cdot\|$ sur \mathcal{L} , la restriction de $\|\cdot\|$ à Ω est l'enveloppe supérieure d'une famille croissante $(\|\cdot\|_\lambda)$ de métriques sous-harmoniques lisses sur $\mathcal{L}|_{\Omega}$ et le courant $c_1(\mathcal{L}, \|\cdot\|)|_{\Omega}$ est la limite des courants $c_1(\mathcal{L}, \|\cdot\|_\lambda)$.*

Démonstration. La preuve du théorème 3.4.2 s'adapte sans difficulté à la situation présente. Quel que soit le sous-ensemble fini S de $\mathcal{I}(X)$ tel que \mathcal{L} soit trivial sur l'adhérence de chacune des composantes connexes de $Y - S$, il existe une unique métrique sous-harmonique lisse $\|\cdot\|_S$ sur \mathcal{L} telle que, pour tout $U \in \pi_0(X - S)$ et toute trivialisation ε de \mathcal{L} au voisinage de \overline{U} , $-\log \|\varepsilon\|_S$ soit l'élément de $\Gamma(U, \mathcal{H}_X) \cap C^0(\overline{U}, \mathbb{R})$ qui coïncide avec $-\log \|\varepsilon\|$ sur ∂U : cette formule définit en effet $\|\cdot\|_S$ sans ambiguïté en vertu de l'harmonicité des fonctions de transitions $-\log |f|$ et la sous-harmonicité s'obtient comme celles des fonctions u_S au théorème 3.4.2.

De la sous-harmonicité de $||\cdot||$ découle que les métriques $||\cdot||_S$ forment une famille croissante lorsque S parcourt l'ensemble filtrant des parties finies de $I(Y)$ satisfaisant aux conditions précédentes. Son enveloppe supérieure est la métrique $||\cdot||$ (même argument que dans la démonstration du théorème 3.4.2). \square

Étant donnés une courbe strictement k -analytique connexe, propre et lisse X et un point $x \in I(X)$, il existe, pour toute mesure de Radon positive μ sur X , un unique courant $T \in D^0(X)$ tel que

$$\begin{cases} dd^c T = \mu - (\int_X \mu) \delta_x \\ T(x) = 0 \end{cases}$$

(théorème 3.3.13) et, vu le théorème 3.4.12, la condition $dd^c T|_{X-\{x\}} \geq 0$ implique que le courant $T|_{X-\{x\}}$ se prolonge naturellement en une fonction sous-harmonique sur $X - \{x\}$.

Nous noterons $g_{x,\mu}$ l'unique fonction $X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ qui est sous-harmonique sur $X - \{x\}$ et satisfait aux conditions

$$\begin{cases} dd^c g_{x,\mu} = \mu - (\int_X \mu) \delta_x \\ g_{x,\mu}(x) = 0. \end{cases}$$

La formule

$$g_{y,\mu} = g_{x,\mu} + (g_{y,x} - g_{x,\mu}(y))$$

est immédiate pour tous points $x, y \in I(X)$; puisque $g_{x,y}$ est une fonction continue (et même lisse), elle implique en particulier la semi-continuité supérieure de $g_{x,\mu}$ sur l'espace X tout entier.

Remarque 3.4.20. — La fonction $g_{x,\mu}$ est négative.

Appliqué à la mesure δ_D associée à un diviseur effectif, ce qui précède définit sur le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ une métrique lisse et sous-harmonique $||\cdot||$ de courbure $\deg(D)\delta_x : -\log ||1_D|| = -g_{x,\delta_D}$.

En particulier : tout faisceau inversible de degré 0 sur X peut être muni d'une métrique *harmonique*.

Une mesure de Radon positive μ sur X de masse totale $\deg(D)$ est la courbure de la métrique sous-harmonique $||\cdot||$ sur le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ définie par la formule : $-\log ||1_D|| = g_{x,\mu} - g_{x,\delta_D}$. Le théorème 3.4.15 fournit une famille croissante $(||\cdot||_\lambda)$ de métriques sous-harmoniques et lisses dont cette métrique est l'enveloppe supérieure; la famille des fonctions lisses

$$\varphi_\lambda = -\log ||1||_\lambda$$

est alors décroissante, d'enveloppe inférieure $g_{x,\mu}$, et les formes lisses

$$\mu_\lambda = dd^c \varphi_\lambda + \delta_x = c_1(\mathcal{O}_X(D), ||\cdot||_\lambda)$$

sont positives, de masse constante $\deg(D) = \int_X \mu$. La famille (μ_λ) converge faiblement vers la mesure μ puisque, pour toute fonction $\psi \in A^0(X)$,

$$\int_X \psi d\mu_\lambda = \int_X \varphi_\lambda dd^c \psi + \psi(x)$$

converge vers $\langle dd^c g_{x,\mu}, \psi \rangle + \psi(x) = \int_X \varphi d\mu$.

Remarque 3.4.21. — Avec les notations précédentes, $\varphi_\lambda = g_{x,\mu_\lambda}$.

Nous concluons cette section par une propriété importante des potentiels.

THÉORÈME 3.4.22. — Soient X une courbe strictement k -analytique lisse et $E \subset X$ un compact polaire. Quelle que soit la mesure de Radon positive μ sur X et le potentiel u de μ (au voisinage de E),

$$\mu(E \cap \{u > -\infty\}) = 0.$$

Démonstration. Cette assertion sera démontrée si elle l'est lorsque la courbe X est remplacée par un voisinage ouvert de E ; cela permet donc de supposer que X est une composante connexe de l'intérieur d'un domaine k -affinoïde et que le potentiel u est majoré. Vu cette dernière condition, il suffit de traiter le cas $u = g_\mu$ (proposition 3.4.16).

L'ensemble $E \cap \{g_\mu > -\infty\}$ est la réunion de la suite croissante des compacts $E_N = E \cap \{g_\mu \geq -N\}$, $N \in \mathbb{N}$, et nous pouvons nous restreindre à prouver $\mu(E_N) = 0$ en vertu de la régularité intérieure des mesures de Radon sur X . Considérons la mesure μ_N induite sur le fermé E_N et son potentiel g_{μ_N} . La fonction $g_\mu - g_{\mu_N}$ est sous-harmonique car $\mathrm{dd}^c(g_\mu - g_{\mu_N}) = \mu - \mu_N \geq 0$ et elle est identiquement nulle sur ∂X . On déduit du principe du maximum que la fonction $g_\mu - g_{\mu_N}$ est négative et le potentiel g_{μ_N} est donc minoré par $-N$.

Soit maintenant v une fonction sous-harmonique telle que $E \subset \{v = -\infty\}$ et $\nu = \mathrm{dd}^c v$. L'identité

$$\int_X v \, \mathrm{dd}^c g_{\mu_N} = \int_X g_{\mu_N} \, d\nu$$

et la majoration

$$\int_X (-g_{\mu_N}) \, d\nu \leq N\nu(E_N) < +\infty$$

impliquent $\mu(E_N) = \mu_N(E) = 0$. □

3.5. Espace $W^1(X)$ et énergie

Nous considérons dans cette section une courbe strictement k -analytique connexe, propre et lisse X et nous introduisons un espace vectoriel topologique complet $W^1(X)$ de courants de degré 0 sur X . Cet espace admet une famille de produits scalaires le munissant de structures hilbertiennes toutes équivalentes (et définissant sa topologie) et conduit naturellement à la notion d'énergie pour les mesures de Radon positives sur X .

L'espace analogue pour une surface de Riemann compacte et connexe M est décrit dans l'article [11], où il est noté $L_1^2(M, \mathbb{R})$.

Une variante peut être développée sur tout ouvert connexe $\Omega \subset X$ tel que $\partial\Omega \subset I(X)$, ce que nous ferons brièvement.

Rappelons que, pour tous points $x, y \in I(X)$, $g_{x,y}$ est la fonction dans $A^0(X)$ caractérisée par les propriétés

$$\begin{cases} \mathrm{dd}^c g_{x,y} = \delta_y - \delta_x \\ g_{x,y}(x) = 0 \end{cases}$$

(proposition 3.3.4, (i)). C'est une fonction négative et, pour tous $x, y, z \in I(X)$,

$$g_{x,y}(z) = \int_X g_{x,y} \, \mathrm{dd}^c g_{x,z} = \int_X g_{x,z} \, \mathrm{dd}^c g_{x,y} = g_{x,z}(y).$$

La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ sur l'espace vectoriel $A^0(X)$ définie par

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}} = - \int_X \varphi \, \mathrm{dd}^c \psi$$

est symétrique (proposition 3.2.12).

Le noyau N de cette forme bilinéaire est constitué des fonctions *constantes* : une fonction $\varphi \in N$ est en effet telle que, pour tous $x, y \in I(X)$,

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \langle \varphi, g_{x,y} \rangle = 0.$$

La forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ est par ailleurs *positive*. Il suffit de vérifier cette assertion sur le sous-espace $A_S^0(X)$ de $A^0(X)$ formé des fonctions qui sont harmoniques sur le complémentaire du sous-ensemble fini S de $I(X)$; ce sous-espace est engendré par 1 et les fonctions $g_{x,y}$, $x, y \in S$, $x \neq y$, et

$$\langle g_{x,y}, g_{x,z} \rangle_{\mathcal{D}} = -g_{x,y}(z)$$

est positif (les fonctions $g_{x,y}$ sont, par construction, négatives.)

Le choix d'un point $x \in I(X)$ permet de munir l'espace vectoriel $A^0(X)$ d'une structure pré-hilbertienne via le produit scalaire

$$\langle \varphi, \psi \rangle_x = \varphi(x)\psi(x) + \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}}.$$

L'espace de Hilbert réel obtenu par complétion est noté $W^1(X)_x$.

Remarque 3.5.1. — Pour tous points $x, y \in I(X)$ et toute fonction $\varphi \in A^0(X)$,

$$\langle \varphi, 1 - g_{x,y} \rangle_x = \varphi(x) + \int_X \varphi \, dd^c g_{x,y} = \varphi(y).$$

PROPOSITION 3.5.2. — *L'injection canonique de $A^0(X)$ dans $D^0(X)$ se prolonge de manière unique en une injection continue de $W^1(X)_x$ dans $D^0(X)$ dont l'image est un sous-espace vectoriel de $D^0(X)$ ne dépendant pas du point x et noté $W^1(X)$.*

Il existe une unique structure d'espace vectoriel topologique sur $W^1(X)$ telle que les isomorphismes canoniques $W^1(X)_x \xrightarrow{\sim} W^1(X)$ soient des homéomorphismes.

Démonstration. L'inégalité

$$|\varphi(y)| = |\langle \varphi, 1 - g_{x,y} \rangle_x| \leq \|1 - g_{x,y}\|_x \|\varphi\|_x,$$

pour toute fonction $\varphi \in A^0(X)$ et tout point $y \in I(X)$, montre que l'injection canonique $A^0(X) \rightarrow D^0(X)$ est continue lorsqu'on munit $A^0(X)$ de la norme $\|\cdot\|_x$ associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ (rappelons que la topologie de $D^0(X) = \text{Hom}(I(X), \mathbb{R})$ est celle de la convergence simple sur $I(X)$).

Pour toute suite de Cauchy (φ_n) dans $A^0(X)$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ et tout point y dans $I(X)$, la suite de réels $(\varphi_n(y))$ est de Cauchy en vertu de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\varphi_n(y) - \varphi_m(y)| &= |\langle \varphi_n, 1 - g_{x,y} \rangle_x - \langle \varphi_m, 1 - g_{x,y} \rangle_x| = |\langle \varphi_n - \varphi_m, 1 - g_{x,y} \rangle_x| \\ &\leq \|1 - g_{x,y}\|_x \|\varphi_n - \varphi_m\|_x. \end{aligned}$$

Associant à un élément u de $W^1(X)_x$, limite d'une suite de Cauchy (φ_n) dans $(A^0(X), \langle \cdot, \cdot \rangle_x)$, la limite dans \mathbb{R} de la suite de Cauchy $(\varphi_n(x))$, nous obtenons une application linéaire

$$W_x^1 \rightarrow D^0(X)$$

prolongeant l'injection canonique de $A^0(X)$ dans $D^0(X)$. Cette application est encore injective car un élément u de $W^1(X)_x$ s'annulant identiquement sur $I(X)$ est tel que

$$\langle u, \varphi \rangle_x = 0$$

pour toute fonction $\varphi \in A^0(X)$, donc nul.

La seconde assertion s'obtient en observant que les normes $\|\cdot\|_x$ et $\|\cdot\|_y$ sur $A^0(X)$ sont équivalentes : puisque

$$\varphi(y) = \varphi(x) - \langle \varphi, g_{x,y} \rangle_x$$

pour toute fonction $\varphi \in A^0(X)$,

$$|\varphi(y)| \leq |\varphi(x)| + \|\varphi\|_x \|g_{x,y}\|_x \leq (1 + \|g_{x,y}\|_x) \|\varphi\|_x$$

et

$$\|\varphi\|_y^2 = \varphi(y)^2 + \langle \varphi, \varphi \rangle \leq \left(1 + (1 + \|g_{x,y}\|_x)^2\right) \|\varphi\|_x^2.$$

□

Le produit scalaire hilbertien $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ sur $W^1(X)$ permet d'identifier cet espace vectoriel au sous-espace de $D^0(X)$ constitué des courants T tels que la forme linéaire

$$A^0(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \langle T, dd^c \varphi \rangle$$

soit continue relativement à la norme $\|\cdot\|_x$, c'est-à-dire :

$$W^1(X) = \left\{ T \in D^0(X) ; \sup_{\varphi \in A^0(X), \|\varphi\|_x \leq 1} |\langle T, dd^c \varphi \rangle| < \infty \right\}.$$

LEMME 3.5.3. — Soit (u_λ) une famille d'éléments de $W^1(X)$ qui converge vers u dans $D^0(X)$; les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) u appartient à $W^1(X)$ et la famille (u_λ) converge faiblement vers u dans $W^1(X)$;
- (ii) la famille des $\langle u_\lambda, u_\lambda \rangle_{\mathcal{D}}$ est bornée.

Démonstration. L'implication (i) \Rightarrow (ii) découle d'un fait qu'une partie faiblement bornée d'un espace de Hilbert est bornée.

L'implication (ii) \Rightarrow (i) est facile : l'observation précédent le lemme montre que le courant limite u appartient à $W^1(X)$ et les deux termes entre parenthèse du second membre de l'égalité

$$\langle \psi, u_\lambda \rangle_x = \langle \psi, u \rangle_x + (\langle \varphi - \psi, u \rangle_x + \langle \psi - \varphi, u_\lambda \rangle_x) + (\langle u_\lambda, \varphi \rangle_x - \langle u, \varphi \rangle_x),$$

où $\varphi \in A^0(X)$, peuvent être rendus arbitrairement petit en utilisant la densité de $A^0(X)$ dans $W^1(X)$. □

Remarque 3.5.4. — Sur le modèle de l'article [11], l'espace $W^1(X)$ permettra de définir des « diviseurs d'Arakelov » satisfaisant à la condition de régularité minimale pour laquelle existe un accouplement d'intersection (voir 4.1.4).

Étant donné un élément φ de $W^1(X)$, considérons la famille $(\varphi_S)_S$ où, pour toute partie finie S de $I(X)$, φ_S est l'unique élément de $A_S^0(X) = A^0(X) \cap \Gamma(X - S, \mathcal{H}_X)$ qui coïncide avec φ sur S . Ayant fixé un point x dans $I(X)$,

$$\begin{aligned} \langle \varphi_S, \varphi_S \rangle_x &= \varphi_S(x) \varphi_S(x) - \int_X \varphi_S \, dd^c \varphi_S \\ &= \varphi_{S'}(x) \varphi_S(x) - \int_X \varphi_{S'} \, dd^c \varphi_S \\ &= \langle \varphi_{S'}, \varphi_S \rangle_x \end{aligned}$$

pour toutes parties finies $S \subset S'$ de $I(X)$ contenant x puisque le support de $dd^c \varphi_S$ est contenu dans S , ensemble sur lequel φ_S et $\varphi_{S'}$ coïncident ; utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il en découle les majorations

$$\|\varphi_S\|^2 = \langle \varphi_S, \varphi_S \rangle_x \leq \|\varphi_{S'}\|_x \|\varphi_S\|_x$$

et

$$\|\varphi_S\|_x \leq \|\varphi_{S'}\|_x$$

pour toutes parties finies $S \subset S'$ de $I(X)$ contenant x (la seconde majoration est triviale si $\|\varphi_S\|_x = 0$ et se déduit immédiatement de la première sinon). La famille de nombres réels $(\|\varphi_S\|_x)_S$ est donc croissante et, par le même argument, majorée par $\|\varphi\|_x$.

Considérons d'autre part une fonction $\psi \in A^0(X)$ telle que $\|\psi\|_x \leq 1$. La convergence de la famille $(\varphi_S)_S$ vers φ dans $D^0(X)$ implique la convergence de la famille des nombres réels $\langle \varphi_S, \psi \rangle_x$ vers $\langle \varphi, \psi \rangle_x$, donc, en particulier, l'inégalité

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_x| \leq \sup_S |\langle \varphi_S, \psi \rangle_x| \leq \sup_S \|\varphi_S\|_x;$$

ceci étant valable pour toute fonction $\psi \in A^0(X)$ telle que $\|\psi\|_x \leq 1$, il en découle finalement la majoration

$$\|\varphi\|_x \leq \sup_S \|\varphi_S\|_x$$

et donc, vu ce qui précède, l'égalité

$$\lim_S \|\varphi_S\|_x = \sup_S \|\varphi_S\|_x = \|\varphi\|_x.$$

La famille $(\varphi_S)_S$ converge faiblement vers φ dans $W^1(X)$ par application du lemme précédent ; puisque, en outre, les normes convergent vers la norme de φ , cette famille est en fait convergente dans $W^1(X)$ en vertu du lemme classique suivant (bien connu des gens éduqués!).

LEMME 3.5.5. — *Soit H un espace de Hilbert ; une famille (v_λ) d'éléments de H convergeant faiblement vers $v \in H$ converge vers v si et seulement si*

$$\|v\| = \lim_\lambda \|v_\lambda\|.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|v - v_\lambda\|^2 = \|v\|^2 + \|v_\lambda\|^2 - 2(v|v_\lambda)$$

et d'observer que la convergence faible implique

$$\lim_\lambda (v|v_\lambda) = (v|v) = \|v\|^2.$$

□

Nous utiliserons le résultat suivant au chapitre 4 (cf. 4.3.6).

PROPOSITION 3.5.6. — *Toute fonction continue φ appartenant à $W^1(X)$ est la limite uniforme d'une famille d'éléments de $A^0(X)$ qui converge dans $W^1(X)$.*

Démonstration. Reprenant les notations que l'on vient d'introduire, il suffit de vérifier que la famille $(\varphi_S)_S$ est uniformément convergente lorsque φ est une fonction continue.

La fonction φ est uniformément continue puisque X est compact. Soient ε un nombre réel strictement positif et \mathcal{K} un recouvrement fini de X par des domaines k -affinoïdes tels que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varepsilon$ pour tous points x, y appartenant à l'un des éléments de \mathcal{K} . Étant donnée une partie finie S de $I(X)$ contenant tous les $\Gamma(K)$, $K \in \mathcal{K}$, chaque composante connexe C de $X - S$ vérifie

$$C \cap K = C \cap (K - \partial K)$$

pour tout $K \in \mathcal{K}$ et est donc entièrement contenue dans chaque domaine $K \in \mathcal{K}$ qu'elle rencontre. Vu le choix de \mathcal{K} , cela implique donc

$$\inf_{\overline{C}} \varphi - \sup_{\overline{C}} \varphi \leq \varepsilon.$$

Via le principe du maximum, l'harmonicité de φ_S sur $X - S$ implique, elle :

$$\min_{S \cap \overline{C}} \varphi_S \leq \varphi_{S|C} \leq \max_{S \cap \overline{C}} \varphi_S$$

pour toute composante connexe C de $X - S$, soit encore

$$\min_{S \cap \overline{C}} \varphi \leq \varphi_{S|\overline{C}} \leq \max_{S \cap \overline{C}} \varphi$$

puisque φ et φ_S coïncident sur S .

La conclusion découle immédiatement de la conjonction des encadrements précédents :

$$\inf_{\overline{C}} \varphi - \varepsilon \leq \min_{S \cap \overline{C}} \varphi \leq \max_{S \cap \overline{C}} \varphi \leq \sup_{\overline{C}} \varphi + \varepsilon$$

pour toute composante connexe C de $X - S$, donc

$$\sup_X |\varphi - \varphi_S| \leq \varepsilon$$

pour toute partie finie S de $I(X)$ contenant les $\Gamma(K)$, $K \in \mathcal{K}$, et la famille $(\varphi_S)_S$ converge par conséquent uniformément vers φ . \square

L'espace $W^1(X)$ conduit à la notion d'énergie d'une mesure de Radon positive sur X .

PROPOSITION 3.5.7. — * tant donné un point $x \in I(X)$, les propriétés suivantes sont équivalentes pour toute mesure de Radon positive μ sur X :*

- (i) $\mu - \left(\int_X \mu \right) \delta_x \in \text{dd}^c W^1(X)$,
- (ii) $g_{x,\mu} \in W^1(X)$,
- (iii) $g_{x,\mu} \in L^1(d\mu)$.

Ces propriétés équivalentes ne dépendent que de la mesure μ , et non du point x considéré.

Démonstration. L'équivalence des points (i) et (ii) est triviale.

La fonction $g_{x,\mu}$ est négative et, comme expliqué à la fin de 3.4.3, le théorème 3.4.19 fournit une famille (μ_λ) de formes lisses positives de masse totale constante $\int_X \mu$ telle que la famille des fonctions lisses g_{x,μ_λ} soit décroissante et d'enveloppe inférieure $g_{x,\mu}$.

La famille (g_{x,μ_λ}) est construite de telle sorte que $g_{x,\mu_{\lambda'}}$ et g_{x,μ_λ} coïncident sur le support de $\text{dd}^c g_{x,\mu_\lambda}$ pour tous $\lambda' \geq \lambda$. On en déduit les égalités

$$-\int_X g_{x,\mu_\lambda} \text{dd}^c g_{x,\mu_\lambda} = -\int_X g_{x,\mu_{\lambda'}} \text{dd}^c g_{x,\mu_\lambda} = -\int_X g_{x,\mu_\lambda} \text{dd}^c g_{x,\mu_{\lambda'}} = -\int_X g_{x,\mu_\lambda} d\mu_{\lambda'}$$

dont découle, en vertu de la positivité de μ_λ , l'inégalité

$$-\int_X g_{x,\mu_\lambda} \text{dd}^c g_{x,\mu_\lambda} \leq -\int_X g_{x,\mu_{\lambda'}} d\mu_{\lambda'} = -\int_X g_{x,\mu_{\lambda'}} \text{dd}^c g_{x,\mu_{\lambda'}}.$$

La famille de nombres réels positifs

$$\langle g_{x,\mu_\lambda}, g_{x,\mu_\lambda} \rangle_x = \langle g_{x,\mu_\lambda}, g_{x,\mu_\lambda} \rangle_{\mathcal{D}}$$

est donc croissante.

En vertu du théorème de convergence monotone de Lebesgue, la fonction $g_{x,\mu}$ est μ -intégrable si et seulement si la famille croissante de nombres réels positifs

$$\left(-\int_X g_{x,\mu_\lambda} d\mu \right)$$

est majorée. Cette condition est vérifiée si et seulement si la famille croissante de nombres réels positifs

$$(\langle g_{x,\mu_\lambda}, g_{x,\mu_\lambda} \rangle_{\mathcal{D}})$$

est majorée. La fonction $g_{x,\mu}$ est donc μ -intégrable si et seulement si $g_{x,\mu}$ appartient à l'espace $W^1(X)$ (lemme 3.5.3).

L'identité

$$g_{y,\mu} = g_{x,\mu} + (g_{y,x} - g_{x,\mu}(y))$$

met en évidence que les assertions (i)-(iii) sont indépendantes du point x considéré. \square

Quels que soient le point $x \in I(X)$ et la mesure de Radon positive μ sur X , le carré de la norme de la forme linéaire $\varphi \mapsto \langle g_{x,\mu}, \text{dd}^c \varphi \rangle$ sur l'espace vectoriel normé $(A^0, \|\cdot\|_x)$ sera appelée *énergie* de la mesure μ relativement au point x ; c'est un élément de $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ noté $E_x(\mu)$.

La proposition précédente montre que $E_x(\mu)$ est l'intégrale de la fonction positive $-g_{x,\mu}$ contre la mesure μ :

$$E_x(\mu) = \int_X (-g_{x,\mu}) \, d\mu.$$

L'application $I(X) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$, $x \mapsto E_x(\mu)$ est à valeurs finies ou constante, égale à $+\infty$.

L'ensemble $\mathcal{E}(X)_+$ des mesures de Radon positives sur X d'énergie finie est un sous-cône réel convexe de $D^1(X)$ engendrant un sous-espace vectoriel $\mathcal{E}(X)$ de

$$A^1(X) + \text{dd}^c W^1(X).$$

Celui-ci hérite, pour tout point $x \in I(X)$, d'une forme bilinéaire déduite de l'application

$$\mathcal{E}(X)_+ \times \mathcal{E}(X)_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\mu, \nu) \mapsto \langle g_{x,\mu}, g_{x,\nu} \rangle_{\mathcal{D},x} = - \int_X g_{x,\nu} \, d\mu.$$

Le noyau de la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D},x}$ est le sous-espace $\mathbb{R}\delta_x$ et celle-ci munit l'espace quotient $\mathcal{E}(X)/\mathbb{R}\delta_x$ d'une structure d'espace de Hilbert réel.

Remarque 3.5.8. — Suivant l'usage en mathématiques, l'énergie est une *forme quadratique* sur $A^1(X) + \text{dd}^c W^1(X)$.

Donnons enfin une variante du principe de Dirichlet dont nous nous servirons au chapitre 4, théorème 4.3.8.

PROPOSITION 3.5.9. — *Soit ν une mesure de masse nulle sur X_v ; la borne supérieure de la fonctionnelle*

$$F_\nu : \begin{array}{ll} A^0(X_v) & \rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto 2 \int_{X_v} \varphi \, d\nu - \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{D}} \end{array}$$

est l'énergie $E(\nu)$ de la mesure de masse nulle ν .

Démonstration. La mesure ν étant de masse nulle, la fonctionnelle F_ν se factorise par l'espace vectoriel quotient $A^0(X_v)^\natural = A^0(X_v)/H(X_v)$, $H(X_v)$ étant l'espace des fonctions réelles harmoniques (localement constantes) sur X_v . La forme de Dirichlet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ induit un produit scalaire sur $A^0(X_v)^\natural$ et ν appartient à $W^1(X_v)$ si et seulement si la forme linéaire

$$A^0(X_v)^\natural \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{X_v} \varphi \, d\nu$$

est bornée sur la boule unité $\{\varphi ; \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{D}} \leq 1\}$; ceci montre que la fonctionnelle F_ν est majorée si et seulement si ν est d'énergie finie.

Il reste à établir que, sous cette dernière hypothèse, la borne supérieure de F_ν est égale à $E(\nu)$. Soit $g \in W^1(X_v)$ tel que $\text{dd}^c g = -\nu$; la formule

$$F_\nu(\varphi) = 2\langle \varphi, g \rangle_{\mathcal{D}} - \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{D}},$$

$\varphi \in A^0(X_v)$, montre que F_ν atteint son maximum au point $[g]$ de la complétion $W^1(X_v)^{\natural} = W^1(X_v)/H(X_v)$ et on a donc

$$\sup_{A^0(X_v)} F_\nu = \max_{W^1(X_v)} F_\nu = F_\nu(g) = \langle g, g \rangle_{\mathcal{D}} = E(\nu).$$

□

Soit $\Omega \subset X$ un ouvert; l'espace vectoriel $A_c^0(\Omega)$ s'identifie canoniquement à un sous-espace de $A^0(X)$, donc de $W^1(X)$, et son adhérence dans $W^1(X)$ se note $W^1(\Omega)$.

Supposons que la frontière $\partial\Omega$ de Ω soit une partie non vide de $I(X)$: quel que soit $x \in \partial\Omega$, la restriction à $W^1(\Omega)$ du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ est égale à $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D},x}$ et il en découle immédiatement que l'injection canonique $A_c^0(\Omega) \hookrightarrow W^1(X)$ réalise une isométrie du complété de l'espace vectoriel pré-hilbertien $(A_c^0(\Omega), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D},x})$ sur $W^1(\Omega)$.

On vérifie comme précédemment que l'injection canonique $A_c^0(\Omega) \rightarrow D^0(\Omega)$ se prolonge en une injection continue de $W^1(\Omega)$ dans $D^0(\Omega)$ dont l'image est l'ensemble des courants $T \in D^0(\Omega)$ tels

$$\sup_{\varphi \in A^0(\Omega)_0, \|\varphi\|_{\mathcal{D}} \leq 1} |\langle T, \text{dd}^c \varphi \rangle| < \infty,$$

condition dont découle la nullité des éléments de $W^1(\Omega) \subset D^1(X)$ sur $\partial\Omega$.

Le lemme 3.5.3 est valable tel quel.

Remarquons que, si une mesure de Radon positive μ sur Ω appartient au sous-espace $\text{dd}^c W^1(\Omega)$ de $D^1(\Omega)$, il existe alors une fonction sous-harmonique u sur Ω telle que $u \leq 0$ et $\text{dd}^c u = \mu$; d'après la proposition 3.4.12, ceci implique la sous-harmonicité de la fonction g_μ . Cette observation étant faite, la démonstration du résultat suivant est tout à fait analogue à celle de la proposition 3.5.7.

PROPOSITION 3.5.10. — *Les propriétés suivantes sont équivalentes pour toute mesure de Radon positive μ sur Ω :*

- (i) $\mu \in \text{dd}^c W^1(\Omega)$;
- (ii) la fonction g_μ est sous-harmonique et $g_\mu \in W^1(\Omega)$;
- (iii) la fonction g_μ est sous-harmonique et $g_\mu \in L^1(d\mu)$.

L'énergie $E(\mu)$ d'une mesure de Radon positive μ sur Ω est définie par la formule

$$E(\mu) = - \int_{\Omega} g_{\mu} \, d\mu$$

(c'est un élément de $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$). Les mesures d'énergie finie forment un sous-cône réel convexe $\mathcal{E}(\Omega)_+$ de $D^1(\Omega)$ qui engendre un sous-espace vectoriel dense de $\text{dd}^c W^1(\Omega)$.

La convexité du cône $\mathcal{E}(\Omega)_+ = \text{dd}^c(\mathcal{SH}(\Omega) \cap W^1(\Omega))$ des mesures de Radon positives d'énergie finie a la conséquence suivante. Pour tout fermé $F \subset \Omega$, l'ensemble $P(F)$ des mesures de probabilité sur F – qui s'identifie à l'ensemble des mesures de probabilité sur Ω dont le support est contenu dans F – est un sous-cône réel convexe et fermé de $D^1(X)$; $P(F) \cap \mathcal{E}(\Omega)_+$ est ainsi un sous-cône réel convexe fermé de l'espace de Hilbert $W^1(\Omega)$ et, s'il n'est pas vide, le théorème de projection implique l'existence d'une *unique* mesure de probabilité $\mu_F = \mu_{F,\Omega} \in P(F)$ réalisant le minimum de l'énergie E sur $P(F)$.

Les mesures d'énergie finie ont la propriété remarquable de ne pas charger les parties polaires.

THÉORÈME 3.5.11. — *Les parties polaires sont μ -négligeables pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$.*

Démonstration. Soit $E \subset \Omega$ une partie polaire ; il est loisible de supposer Ω connexe vu l'égalité

$$\mu(E) = \sum_{\Omega' \in \pi_0(\Omega)} \mu(E \cap \Omega').$$

Il est par ailleurs suffisant de démontrer l'assertion lorsque E est un borélien – car toute partie polaire de X est contenue dans un borélien polaire (remarque 3.4.8, 2) – et la régularité intérieure des mesures de Radon sur un espace topologique localement compact permet de se restreindre au cas d'un compact.

La conclusion est maintenant aisée : pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$, le théorème 3.4.22 implique

$$\mu(E) = \mu(E \cap \{g_\mu = -\infty\}) \leq \mu(\{g_\mu = -\infty\})$$

et, puisque $g_\mu \in L^1(d\mu)$ (proposition 3.5.6),

$$\mu(E) = 0.$$

□

3.6. Capacités

Nous considérons toujours dans cette dernière section une courbe strictement k -analytique X connexe, propre et lisse.

3.6.1. Capacité relative.

Étant donné un ouvert $\Omega \subset X$ tel que $\partial\Omega$ soit une partie non vide de $I(X)$, la *capacité relative* d'un compact $K \subset \Omega$ est par définition l'élément $C(K, \Omega)$ de $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ défini par l'identité

$$C(K, \Omega)^{1/2} = \sup \left\{ \int_K d\mu ; \mu \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ et } E(\mu) = 1 \right\},$$

la borne supérieure d'une famille vide de nombre réels positifs étant 0 ; on a également

$$C(K, \Omega)^{-1} = \inf \{E(\mu) ; \mu \in \text{Prob}(K)\}.$$

La fonction $C(., \Omega)$ sur l'ensemble des compacts de Ω est trivialement croissante et on l'étend en une fonction sur l'ensemble des parties de Ω en posant

$$C(E, \Omega) = \sup \{C(K, \Omega) ; K \text{ compact et } K \subset E\}.$$

Le théorème 3.5.11 peut se reformuler en disant que la fonction $C(., \Omega)$ s'annule sur les sous-ensembles polaires de Ω .

Remarque 3.6.1

1. La régularité intérieure des mesures de Radon sur X implique immédiatement la formule

$$C(E, \Omega) = \sup \left\{ \int_E \mu ; \mu \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ et } E(\mu) = 1 \right\}$$

pour tout borélien E de Ω .

2. Étant donnés un compact $K \subset \Omega$ et une mesure $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$ telle que $E(\mu) = 1$ et $\mu(K) > 0$, la mesure μ_K induite par μ sur K est d'énergie finie non nulle (puisque non nulle). Son potentiel g_{μ_K} majore le potentiel g_μ puisque $g_\mu - g_{\mu_K}$ est une fonction sous-harmonique s'annulant sur $\partial\Omega$ et les inégalités

$$E(\mu_K) = - \int_{\Omega} g_{\mu_K} \, dd^c g_{\mu_K} \leq - \int_{\Omega} g_{\mu} \, dd^c g_{\mu_K} \leq \sqrt{E(\mu)} \sqrt{E(\mu_K)}$$

(la dernière est l'inégalité de Cauchy-Schwarz) impliquent

$$E(\mu_K) \leq E(\mu) = 1.$$

La mesure $\mu' = E(\mu_K)^{-1/2} \mu_K \in \mathcal{E}(\Omega)$ vérifie par suite les conditions $E(\mu') = 1$ et $\mu(K) \leq \mu'(K)$. On a donc $\mu'(K) \leq C(K, \Omega)$ et il est ainsi suffisant de considérer, dans la formule définissant $C(K, \Omega)$, les mesures dont le support est contenu dans K .

3. L'ensemble des composantes connexes de Ω peut être de cardinal non dénombrable ; on vérifie toutefois facilement la formule

$$C(E, \Omega) = \sum_{\Omega' \in \pi_0(\Omega)} C(E \cap \Omega', \Omega'),$$

le terme de droite désignant la borne supérieure des $C(E \cap U, U)$ lorsque U parcourt l'ensemble des réunions finies de composantes connexes de Ω et il n'existe donc, pour toute partie $E \subset \Omega$ de capacité relative finie, qu'un sous-ensemble au plus dénombrable $\Pi \subset \pi_0(\Omega)$ tel que $C(E \cap \Omega', \Omega') > 0$ pour toute composante $\Omega' \in \Pi$ (voir également la remarque 3.6.12).

Quel que soit le sous-ensemble E de Ω , la *fonction maximale* de E dans Ω est la régularisée semi-continue supérieurement u_E^* de l'enveloppe supérieure de la famille

$$\mathcal{F}(E) = \{v \in \mathcal{SH}(\Omega) ; v \leq 0 \text{ et } v|_E \leq -1\}.$$

C'est une fonction sous-harmonique sur E (proposition 3.1.9).

Remarque 3.6.2

1. Étant données des parties $E \subset E'$ de Ω , $\mathcal{F}(E') \subset \mathcal{F}(E)$ et donc

$$u_{E'}^* \leq u_E^*.$$

2. Tout point $\zeta \in \partial\Omega$ appartenant à $I(X)$, il existe une fonction b semi-continue supérieurement sur $\overline{\Omega}$, sous-harmonique sur Ω , telle que $b(\zeta) = 0$ et $b|_{\overline{\Omega} - \{\zeta\}} < 0$ (proposition 3.1.22). Lorsque E est une partie *relativement compacte* de Ω , il existe par conséquent un nombre réel $\lambda > 0$ tel que $\lambda b \in \mathcal{F}(E)$ et la fonction maximale u_E^* est alors *identiquement nulle* sur $\partial\Omega$. Elle coïncide donc avec le potentiel $g_{dd^c u_E^*}$ de la mesure de Radon positive $dd^c u_E^*$.

PROPOSITION 3.6.3. — *Pour tout domaine k -affinoïde $V \subset \Omega$,*

$$C(V, \Omega) = C(\partial V, \Omega) = \int_{\Omega} dd^c u_V^*.$$

En particulier, $C(K, \Omega) < \infty$ pour tout compact $K \subset \Omega$.

Démonstration. La fonction u_V^* est lisse, identiquement nulle sur $\partial\Omega$ et égale à -1 sur ∂V . Comme

$$E(dd^c u_V^*) = - \int_V g_{dd^c u_V^*} \, dd^c u_V^* = - \int_V u_V^* \, dd^c u_V^* = \int_V dd^c u_V^* > 0,$$

la mesure $\mu_V^* = E(\mathrm{dd}^c u_V^*)^{-1/2} \mathrm{dd}^c u_V^*$, dont le support est contenu dans ∂V , a pour masse $(\int_V \mathrm{dd}^c u_V^*)^{1/2}$ et est d'énergie 1. On a donc

$$C(V, \Omega) \geq C(\partial V, \Omega) \geq \left(\int_{\Omega} \mu_V^* \right)^2 = \int_V \mathrm{dd}^c u_V^*.$$

$$\begin{aligned} E(\mu - \mu_V^*) &= E(\mu) + E(\mu_V^*) + 2 \int_{\Omega} g_{\mu_V^*} d\mu \\ &= 2 + 2E(\mathrm{dd}^c u_V^*)^{-1/2} \int_V u_V^* d\mu \\ &= 2 \left(1 - E(\mathrm{dd}^c u_V^*)^{-1/2} \int_V \mu \right) \end{aligned}$$

soit encore

$$E(\mu - \mu_V^*) = 2 \left(1 - \frac{\mu(V)}{\mu_V^*(V)} \right).$$

Il en découle

$$\int_V \mu \leq \int_V \mu_V^* = \left(\int_V \mathrm{dd}^c u_V^* \right)^{1/2}$$

et donc

$$C(V, \Omega) \leq \int_V \mathrm{dd}^c u_V^*.$$

L'égalité

$$C(V, \Omega) = C(\partial V, \Omega) = \int_{\Omega} \mathrm{dd}^c u_V^*$$

est démontrée.

La seconde assertion de la proposition se déduit immédiatement de la précédente puisque tout compact de Ω est contenu dans un domaine k -affinoïde. \square

Remarque 3.6.4. — Pour tout domaine k -affinoïde V dans Ω , le support de la mesure $\mathrm{dd}^c u_V^*$ est contenu dans le bord de Shilov de V . On peut en fait être plus précis : un point $x \in \Gamma(V)$ appartient au support de $\mathrm{dd}^c u_V^*$ si et seulement s'il appartient à la frontière d'une composante connexe $X - V$ sur laquelle la fonction lisse u_V^* n'est pas identiquement égale à -1 , c'est-à-dire si et seulement s'il appartient à la frontière d'une composante connexe de $X - V$ rencontrant $\partial\Omega$.

Un compact $K \subset \Omega$ est l'intersection d'une famille décroissante de domaines k -affinoïdes $V_{\lambda} \subset \Omega$, $\lambda \in \Lambda$. La fonction sous-harmonique et lisse $u_{\lambda} = u_{V_{\lambda}} = u_{V_{\lambda}}^*$ est identiquement égale à -1 sur V_{λ} et harmonique sur $\Omega - V_{\lambda}$. On a ainsi $u_{\lambda} = u_{\lambda'} = -1$ sur $V_{\lambda'} \subset V_{\lambda}$ quels que soient $\lambda \leq \lambda'$ dans Λ , ce qui implique $u_{\lambda'} \leq u_{\lambda}$ sur Ω ; la famille $(u_{\lambda})_{\lambda \in \Lambda}$ est croissante et contenue dans $\mathcal{F}(K)$. Elle est majorée par la fonction sous-harmonique u_K^* et la régularisée semi-continue supérieurement u^* de son enveloppe supérieure est une fonction sous-harmonique sur Ω majorée par u_K^* .

La fonction u^* est d'autre part harmonique sur $\Omega - K$ en vertu de l'harmonicité de u_{λ} sur $\Omega - V_{\lambda}$ et supérieure ou égale à -1 sur K ; elle majore par conséquent tous les éléments de $\mathcal{F}(K)$ et s'identifie ainsi à u_K^* .

L'égalité $u_K^* = u^*$ implique l'harmonicité de u_K^* sur $\Omega - K$. Notons également que la mesure $\mathrm{dd}^c u_K^*$ est la limite des mesures $\mathrm{dd}^c u_{V_\lambda}^* = \mathrm{dd}^c u_\lambda$ puisque la famille (u_λ) converge dans D^0 ; par conséquent

$$\int_K \mathrm{dd}^c u_K^* = \int_{V_{\lambda'}} \mathrm{dd}^c u_K^* = \inf_{\lambda \geq \lambda'} \int_{V_{\lambda'}} \mathrm{dd}^c u_{V_\lambda}^* = \inf_{\lambda \in \Lambda} \int_{V_\lambda} \mathrm{dd}^c u_{V_\lambda}^* = \inf_{\lambda \in \Lambda} C(V_\lambda, \Omega).$$

Utilisant l'inégalité

$$C(K, \Omega) \leq \inf_{\lambda} C(V_\lambda, \Omega),$$

les constatations suivantes s'imposent :

- si $\int_K \mathrm{dd}^c u_K^* = 0$, $C(K, \Omega) = 0$;
- si $\int_K \mathrm{dd}^c u_K^* > 0$,

$$E(\mathrm{dd}^c u_K^*) = - \int_K u_K^* \mathrm{dd}^c u_K^* \geq \int_K \mathrm{dd}^c u_K^*$$

car $u_K^* \geq -1$, donc

$$\int_K \mathrm{dd}^c u_K^* \leq \left(\int_K E(\mathrm{dd}^c u_K^*)^{-1/2} \mathrm{dd}^c u_K^* \right)^2 \leq C(K, \Omega)$$

et finalement

$$C(K, \Omega) = \int_K \mathrm{dd}^c u_K^*.$$

Nous venons de démontrer la première assertion de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6.5

(i) *Pour tout compact $K \subset \Omega$,*

$$C(K, \Omega) = \int_K \mathrm{dd}^c u_K^*.$$

(ii) *La capacité relative descend sur les compacts :  tant donnée une suite décroissante (K_n) de compacts dans Ω , d'intersection K ,*

$$C(K, \Omega) = \inf_n C(K_n, \Omega).$$

(iii) *La capacité relative est fortement sous-additive sur les compacts : pour tous compacts K_1, K_2 de Ω ,*

$$C(K_1 \cup K_2, \Omega) + C(K_1 \cap K_2, \Omega) \leq C(K_1, \Omega) + C(K_2, \Omega).$$

Démonstration.

Le point (i) a été démontré.

(ii) Il suffit de considérer, pour tout entier naturel n , une famille décroissante $(V_{n,\lambda})_\lambda$ de domaines k -affino ides dans Ω d'intersection V_n puis d'utiliser les identités

$$C(K, \Omega) = \inf_{n,\lambda} C(V_{n,\lambda}, \Omega) \quad \text{et} \quad C(K_n, \Omega) = \inf_{\lambda} C(K_{n,\lambda}, \Omega)$$

 tablies au cours de la démonstration du point (i).

(iii) Traitons tout d'abord le cas de deux domaines (strictement) k -affino ides K_1 et K_2 dans Ω ; $K_1 \cap K_2$ est alors un domaine (strictement) k -affino ide et il en est de même de $K_1 \cup K_2$ (corollaire 2.1.17).

Sous ces conditions, l'inégalité de l'énoncé se déduit immédiatement de l'inégalité

$$u_{K_1}^* + u_{K_2}^* \leq u_{K_1 \cup K_2}^* + u_{K_1 \cap K_2}^*$$

entre fonctions lisses sur Ω ; démontrons cette dernière.

Soient $\varphi = u_{K_1}^* + u_{K_2}^*$ et $\psi = u_{K_1 \cup K_2}^* + u_{K_1 \cap K_2}^*$. Ces fonctions sont harmoniques sur $\Omega - (K_1 \cup K_2)$ et nulles sur $\partial\Omega$. Pour tout point $x \in K_1 \cup K_2$,

$$\begin{cases} \varphi(x) = -1 + u_{K_i}^*(x) \ (i \in \{1, 2\}) \\ \psi(x) = u_{K_1 \cap K_2}^*(x) - 1 \end{cases} \quad \text{si } x \in K_1 \Delta K_2 = (K_1 \cup K_2) - (K_1 \cap K_2),$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = -2 \\ \psi(x) = -2 \end{cases} \quad \text{si } x \in K_1 \cap K_2.$$

Comme $u_{K_1}^*, u_{K_2}^* \leq u_{K_1 \cap K_2}^*$ (remarque 3.6.2, 1), $\varphi \leq \psi$ sur $K_1 \cup K_2$ et donc finalement $\varphi \leq \psi$ sur $\partial(\Omega - (K_1 \cup K_2))$; il ne reste qu'à appliquer le principe du maximum.

Le cas de deux parties compactes se déduit immédiatement de ce qui précède par passage à la borne inférieure. \square

Tout ouvert U de Ω est la réunion d'une famille croissante de domaines k -affinoides $V_\lambda \subset \Omega$. Posons $u_\lambda = u_{V_\lambda}^*$; les inclusions $V_\lambda \subset V_{\lambda'} \subset U$ impliquant les inégalités

$$u_U^* \leq u_{\lambda'} \leq u_\lambda$$

(voir à la suite de la remarque 3.6.4), la fonction maximale de U est majorée par l'enveloppe inférieure u de la famille des (u_λ) . D'autre part : la fonction u_λ étant identiquement égale à -1 sur V_λ pour tout λ , la fonction sous-harmonique u est identiquement égale à -1 sur Ω et est par conséquent majorée par u_U^* . Nous avons ainsi prouvé l'identité

$$u_U^* = \inf_{\lambda} u_\lambda.$$

Celle-ci conduit à deux observations importantes :

- u_U^* est identiquement égale à -1 sur U ;
- la famille des mesures de Radon positives $(dd^c u_\lambda)$ converge (faiblement) vers la mesure $dd^c u_U^*$:

$$\int_{\Omega} \varphi \, dd^c u_U^* = \lim_{\lambda} \int_{\Omega} \varphi \, dd^c u_\lambda$$

pour toute fonction $\varphi \in A_c^0(\Omega)$. En particulier, lorsque U est contenu dans un compact K de Ω ,

$$\int_{\Omega} \varphi \, dd^c u_U^* = \lim_{\lambda} \int_{\Omega} \varphi \, dd^c u_\lambda = \lim_{\lambda} \int_{\Omega} dd^c u_\lambda$$

pour toute fonction $\varphi \in A_c^0(\Omega)$ identiquement égale à 1 au voisinage de K , d'où

$$\int_{\Omega} dd^c u_U^* = \sup_{\lambda} C(V_\lambda, \Omega)$$

et donc, tout compact contenu dans U étant contenu dans l'un des V_λ ,

$$C(U, \Omega) = \int_U dd^c u_U^*.$$

Nous venons de prouver la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6.6. — *La fonction maximale u_U^* d'un ouvert U de Ω est identiquement égale à -1 sur U et, si U est relativement compact dans Ω ,*

$$C(U, \Omega) = \int_U dd^c u_U^*.$$

Remarque 3.6.7. — La capacité relative d'un ouvert U de Ω est la borne supérieure des $C(V, \Omega)$ lorsque V parcourt l'ensemble des domaines k -affinoïdes de U . En vertu de la proposition 3.6.3, $C(U, \Omega)$ est également la borne supérieure des $C(S, \Omega)$, S parcourant l'ensemble des parties finies de $I(U)$.

La *capacité extérieure* relative à Ω est l'application $C^*(., \Omega)$ de l'ensemble des parties de Ω dans $\mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ définie par la formule

$$C^*(E, \Omega) = \inf\{C(U, \Omega) ; E \subset U \subset \Omega \text{ et } U \text{ ouvert}\}.$$

PROPOSITION 3.6.8. — La capacité extérieure $C^*(., \Omega)$ possède les propriétés suivantes :

- (i) elle est croissante : si $E_1 \subset E_2 \subset \Omega$, $C^*(E_1, \Omega) \leq C^*(E_2, \Omega)$;
- (ii) elle coïncide avec la capacité relative $C(., \Omega)$ – et donc descend – sur les compacts de Ω ;
- (iii) elle est fortement sous-additive : si $E_1, E_2 \subset \Omega$,

$$C^*(E_1 \cup E_2, \Omega) + C^*(E_1 \cap E_2, \Omega) \leq C^*(E_1, \Omega) + C^*(E_2, \Omega);$$

- (iv) elle monte sur les sous-ensembles quelconques de Ω : pour toute suite croissante (E_n) de parties de Ω , de réunion E ,

$$C^*(E, \Omega) = \sup_n C^*(E_n, \Omega).$$

Démonstration.

Le point (i) est trivial.

Le point (ii) se démontre aisément : soit en effet $K \subset \Omega$ un compact et considérons une famille décroissante de domaines k -affinoïdes $V_\lambda \subset \Omega$ telle que

$$K = \bigcap_{\lambda} V_{\lambda}.$$

Pour tout λ ,

$$C(K, \Omega) \leq C^*(K, \Omega) \leq C^*(V_{\lambda} - \partial V_{\lambda}, \Omega) \leq C(V_{\lambda}, \Omega) ;$$

il vient donc

$$C(K, \Omega) \leq C^*(K, \Omega) \leq \inf_{\lambda} C(V_{\lambda}, \Omega) = C(K, \Omega).$$

Le point (iii) se démontre en trois étapes.

Première étape. Lorsque E_1 et E_2 sont des compacts, le résultat a été démontré à la proposition 3.6.5 puisque la capacité extérieure coïncide alors avec la capacité relative.

Deuxième étape. Supposons alors que E_1 et E_2 soient deux ouverts de Ω et soit K un compact contenu dans $E_1 \cup E_2$. Étant donné un nombre réel strictement positif ε , il existe un compact K' contenu dans $E_1 \cap E_2$ tel que

$$C(E_1 \cap E_2, \Omega) \leq C(K', \Omega) + \varepsilon$$

et l'on pose $K'' = K \cup K'$; puisque E_1 et E_2 sont des ouverts de Ω , $K_1'' = K'' \cap (\Omega - E_2)$ et $K_2'' = K'' \cap (\Omega - E_1)$ sont des compacts tels que $K_i'' \subset E_i$, $i = 1, 2$, $K'' = K_1'' \cup K_2''$ et $K' \subset K_1'' \cap K_2''$. Dans ces conditions,

$$\begin{aligned} C(K, \Omega) \leq C(K'', \Omega) = C(K_1'' \cup K_2'', \Omega) &\leq C(K_1'', \Omega) + C(K_2'', \Omega) - C(K', \Omega) \\ &\leq C(E_1, \Omega) + C(E_2, \Omega) - C(E_1 \cap E_2) + \varepsilon \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} C^*(E_1 \cup E_2, \Omega) + C^*(E_1 \cap E_2, \Omega) &= C(E_1 \cup E_2, \Omega) + C(E_1 \cap E_2, \Omega) \\ &\leq C(E_1, \Omega) + C(E_2, \Omega) = C^*(E_1, \Omega) + C^*(E_2, \Omega). \end{aligned}$$

Troisième étape. Traitons enfin le cas de deux parties quelconques E_1, E_2 de Ω . Soient ε un nombre réel strictement positif et U_i un voisinage ouvert de E_i tel que

$$C^*(U_i, \Omega) \leq C^*(E_i, \Omega) + \frac{\varepsilon}{2}$$

($i = 1, 2$) ; $U_1 \cup U_2$ (resp. $U_1 \cap U_2$) est alors un voisinage ouvert de $E_1 \cup E_2$ (resp. $E_1 \cap E_2$) dans Ω et, en vertu de l'étape précédente,

$$\begin{aligned} C^*(E_1 \cup E_2, \Omega) + C^*(E_1 \cap E_2, \Omega) &\leq C^*(U_1 \cup U_2, \Omega) + C^*(U_1 \cap U_2, \Omega) \\ &\leq C^*(U_1, \Omega) + C^*(U_2, \Omega) \\ &\leq C^*(E_1, \Omega) + C^*(E_2, \Omega) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du point (iii).

Le point (iv) est trivial lorsque les E_n sont des ouverts et le cas général s'en déduit aisément. Soient en effet ε un nombre réel strictement positif et U_0 un voisinage ouvert de E_0 dans Ω tel que

$$C^*(E_0, \Omega) \leq C^*(U_0, \Omega) = C(U_0, \Omega) \leq C^*(E_0, \Omega) + \varepsilon/2.$$

Si $E \subset U_0$,

$$C^*(E, \Omega) \leq C(U_0, \Omega) \leq C^*(E_0, \Omega) + \varepsilon \leq \sup_n C^*(E_n, \Omega) + \varepsilon;$$

sinon, notons n_1 le plus petit entier tel que E_{n_1} ne soit pas contenu dans U_0 . Comme

$$C^*(U_0 \cup E_{n_1}, \Omega) \leq C^*(U_0, \Omega) + C^*(E_{n_1}, \Omega) - C^*(E_0, \Omega) \leq C^*(E_{n_1}, \Omega) + \varepsilon/2,$$

il existe un voisinage ouvert U_1 de $U_0 \cup E_{n_1}$ dans Ω tel que

$$C^*(U_1, \Omega) \leq C^*(U_0 \cup E_{n_1}, \Omega) + \varepsilon/4 \leq C^*(E_{n_1}, \Omega) + (1/2 + 1/4)\varepsilon \leq \sup_n C^*(E_n, \Omega) + (1/2 + 1/4)\varepsilon.$$

L'itération de ce procédé fournit finalement un voisinage ouvert U de E tel que

$$C^*(E, \Omega) \leq C^*(U, \Omega) \leq \sup_n C^*(E_n, \Omega) + \varepsilon,$$

ce qui prouve l'inégalité

$$C^*(E, \Omega) \leq \sup_n C^*(E_n, \Omega)$$

et donc l'égalité désirée. □

La capacité extérieure (relative) $C^*(\cdot, \Omega)$ est ainsi une capacité au sens de G. Choquet sur l'espace topologique séparé Ω .

THÉORÈME 3.6.9. — *Pour tout sous-ensemble borélien B de Ω ,*

$$C^*(B, \Omega) = C(B, \Omega) = \left(\sup \left\{ \int_B d\mu ; \mu \in \mathcal{E}(\Omega) \text{ et } E(\mu) = 1 \right\} \right)^2.$$

C'est une application du théorème de capacabilité de Choquet, qui établit plus généralement l'identité $C^*(A, \Omega) = C(A, \Omega)$ pour tout sous-ensemble analytique A de Ω (*analytique* au sens de la topologie générale!).

PROPOSITION 3.6.10. — *Pour toute partie relativement compacte E de Ω ,*

$$C^*(E, \Omega) = \int_{\Omega} dd^c u_E^*.$$

Démonstration. La relative compacité de E dans Ω garantit que la fonction maximale u_E^* s'annule identiquement sur $\partial\Omega$ (remarque 3.6.2, 2) et s'identifie donc avec le potentiel de la mesure de Radon positive $\text{dd}^c u_E^*$.

Notons \mathcal{U} l'ensemble filtrant et non vide des voisinages ouverts relativement compacts de E dans Ω et soit u^* la régularisée semi-continue supérieurement de la famille croissante des fonctions u_U^* , $U \in \mathcal{U}$; nous allons prouver l'égalité désirée en établissant l'identité

$$u_E^* = u^*.$$

L'inégalité $u^* \leq u_E^*$ est triviale (remarque 3.6.2, 1).

Fixons un nombre réel $\varepsilon > 0$ et soit u une fonction dans $\mathcal{F}(E)$. L'ensemble $\{u < -1 + \varepsilon\}$ est un voisinage ouvert de E dans Ω et contient donc un voisinage ouvert relativement compact U de E ; la fonction u_U^* étant identiquement égale à -1 sur U (proposition 3.6.6), l'inégalité $u \leq (1 - \varepsilon)u_U^*$ en découle. La famille $\mathcal{F}(E)$ est par conséquent majorée par celle des $(1 - \varepsilon)u_U^*$, $U \in \mathcal{U}$, et donc

$$u_E^* \leq (1 - \varepsilon)u^*.$$

□

Une conséquence immédiate de la proposition précédente est la caractérisation des parties polaires de Ω comme zéros de la capacité extérieure $C^*(\cdot, \Omega)$.

THÉORÈME 3.6.11. — *Lorsque Ω est connexe, les assertions suivantes sont équivalentes pour tout sous-ensemble $E \subset \Omega$:*

- (i) E est polaire ;
- (ii) $C^*(E, \Omega) = 0$;
- (iii) $u_E^* = 0$;
- (iv) il existe une fonction $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ telle que $u \leq 0$ et $E \subset \{u = -\infty\}$.

Démonstration.

(i) \Rightarrow (ii). La capacité relative $C(E, \Omega)$ d'une partie polaire E de Ω est nulle et, puisque E est contenu dans un sous-ensemble borélien et polaire de Ω , il en est de même de sa capacité extérieure en vertu du théorème 3.6.8 (et de la croissance de $C^*(\cdot, \Omega)$).

(ii) \Rightarrow (iii). Tout sous-ensemble E de capacité extérieure finie est contenu dans un ouvert U de Ω de capacité relative $C(U, \Omega)$ finie, donc relativement compact. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente.

(iii) \Rightarrow (iv). La fonction maximale u_E^* et l'enveloppe supérieure u_E de la famille $\mathcal{F}(E)$ coïncident sur $I(\Omega)$. Choisissons alors un point $x \in I(\Omega)$ et une suite (u_n) de fonctions dans $\mathcal{F}(E)$ telle que $u_n(x) \geq -2^{-n}$ pour tout entier naturel n . La suite décroissante

$$\left(\sum_{0 \leq n \leq N} u_n \right)_N$$

de fonctions sous-harmoniques négatives sur Ω , minorée par -2 en x , converge vers une fonction sous-harmonique négative $u \in \mathcal{SH}(\Omega)$ (en vertu de la connexité de Ω), qui est identiquement égale à $-\infty$ sur E .

(iv) \Rightarrow (i). C'est évident. □

Remarque 3.6.12. — L'hypothèse de connexité sur Ω peut être affaiblie en demandant seulement que l'ensemble $\pi_0(\Omega)$ soit au plus dénombrable ; cette dernière condition est nécessaire à la validité du théorème. Supposons par exemple que le corps résiduel \tilde{k} de k soit de

puissance $> \aleph_0$ et choisissons, pour tout $\xi \in \tilde{k}$, un élément x_ξ de k° se réduisant sur ξ ; notant η le point de Gauss dans \mathbb{A}_k^1 et Ω l'ouvert $\mathbb{A}_k^1 - \{\eta\}$ de \mathbb{A}_k^1 , la réunion des points x_ξ constitue une partie fermée E de Ω pour laquelle les assertions des points (iii) et (iv) sont trivialement vérifiées.

Il est facile de voir que la capacité extérieure de E est infinie. L'ensemble des ouverts U de Ω de la forme

$$U = \bigcup_{\xi \in E} D(\xi, \varepsilon_\xi),$$

où $\varepsilon_\xi \in]0, 1[$ pour tout ξ , est en effet un système fondamental de voisinages de E dans Ω ; l'ensemble E étant par construction non dénombrable et chaque disque $D(\xi, \varepsilon_\xi)$ ayant une capacité strictement positive, un tel ouvert est de capacité infinie et donc

$$C^*(E, \Omega) = +\infty.$$

Remarquons enfin que l'ensemble E n'est *pas* une partie polaire de Ω selon la définition introduite en 3.1.2 puisqu'il ne peut être recouvert par un ensemble dénombrable d'ouverts connexes de Ω . Les points (i) et (ii) du théorème précédent sont en défaut dans cet exemple.

La « pathologie » que l'on vient de mettre en évidence (et sa version duale rencontrée lorsque le groupe $|k^\times|$ n'est pas dénombrable) est la justification de la restriction introduite dans la définition des sous-ensembles polaires d'une courbe strictement k -analytique lisse (ce ne sont pas simplement les parties localement contenues dans l'ensemble des infinis d'une fonction sous-harmonique).

Il est facile de voir que les points (i)-(iv) sont en défaut lorsque E est vu comme partie de l'ouvert connexe $\Omega' = D(0, r) = \{|T| < r\} \subset \mathbb{A}_k^1$, $r > 1$. Une fonction sous-harmonique u sur Ω' est nécessairement harmonique, donc localement constante, sur le complémentaire d'une partie dénombrable de $\pi_0(\Omega' - \{\eta\})$ puisque la mesure $\mathrm{dd}^c u$ est de masse finie au voisinage de η . Toutes les fonctions appartenant à

$$\mathcal{F}(E) = \{u \in \mathcal{SH}(\Omega') ; u \leq 0 \text{ et } u|_E \leq -1\}$$

prennent donc nécessairement la valeur -1 au point η et la fonction maximale u_E^* est identiquement égale à -1 sur $E(0, 1)$. Le même raisonnement prouve qu'il n'existe pas de fonction sous-harmonique sur Ω' prenant la valeur $-\infty$ aux points de E et les seuls ouverts connexes dans Ω' sur lesquels on peut trouver une telle fonction sont les $D(x_\xi, 1)$. Enfin, la capacité relative des ouverts

$$\bigcup_{\xi \in \tilde{k}} D(x_\xi, \varepsilon_\xi),$$

est égale à

$$\int_{\Omega'} \mathrm{dd}^c u_E^* = C(E(0, 1), \Omega') = (\log r)^{-1}$$

pour tous nombres réels $\varepsilon_\xi \in]0, 1[$ et il en est de même pour $C^*(E, \Omega')$.

Reprenant la terminologie usuelle dans le cadre archimédien, nous dirons qu'une propriété (P) est vraie *quasi-partout* sur un sous-ensemble E de X s'il existe une partie polaire $E' \subset X$ telle que (P) soit vraie sur $E \cap (X - E')$. Utilisant la caractérisation des parties polaires obtenues au théorème 3.6.11, il est maintenant facile d'établir la caractérisation suivante des fonctions maximales.

THÉORÈME 3.6.13. — *Quels que soient l'ouvert $\Omega \subset X$ tel que $\partial\Omega \subset I(X)$ et le compact $K \subset \Omega$, la fonction maximale u_K^* est l'unique fonction sous-harmonique sur Ω et harmonique sur $\Omega - K$ qui soit identiquement nulle sur $\partial\Omega$ et quasi-partout égale à -1 sur K .*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que la fonction maximale u_K^* possède les propriétés voulues ; il suffit pour cela de prouver qu'elle est quasi-partout égale à -1 sur K .

Il n'y a qu'un nombre fini de composantes connexes de Ω qui rencontrent K et la réunion d'une famille finie (dénombrable) de parties polaires est polaire ; nous pouvons donc supposer Ω connexe et utiliser le théorème 3.6.11.

Le compact K est l'intersection d'une famille décroissante de domaines k -affinoïdes $V_\lambda \subset \Omega$, $\lambda \in \Lambda$ (corollaire 2.1.18). Soit u_λ la fonction maximale de V_λ dans Ω ($\lambda \in \Lambda$) : c'est une fonction lisse sur Ω , nulle sur $\partial\Omega$ et identiquement égale à -1 sur V_λ .

La famille (u_λ) est croissante et la fonction maximale u_K^* de K dans Ω est la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure u des u_λ (voir la discussion précédant la proposition 3.6.5). L'ensemble

$$\{u < u_K^*\} = \bigcup_{N \geq 1} \bigcap_{\lambda \in \Lambda} \{u_\lambda \leq u_K^* - 1/N\}$$

est un F_σ de Ω car $\{f \leq g\}$ est fermé pour toutes fonctions f continue et g semi-continue supérieurement.

La famille (u_λ) converge vers u_K^* dans $D^0(\Omega)$ et, la famille $(E(\mathrm{dd}^c u_\lambda))$ étant bornée (décroissante), la limite u_K^* appartient à $W^1(\Omega)$ en vertu du lemme 3.5.3. Ceci implique la μ -négligeabilité du fermé

$$E_N = \bigcap_{\lambda} \{u_\lambda \leq u_K^* - 1/N\}$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}(\Omega)$ et tout entier $N \geq 1$. Les fermés E_N sont par conséquent tous de capacité relative nulle et

$$C^*(\{u < u_K^*\}, \Omega) = \sup_N C^*(E_N, \Omega) = \sup_N C(E_N, \Omega) = 0.$$

La fonction u_K^* est ainsi égale à $u = -1$ sur le complémentaire dans K d'une partie polaire.

Vérifions finalement l'assertion d'unicité : puisqu'une fonction sous-harmonique sur Ω est uniquement déterminée par sa restriction à $I(\Omega)$, deux fonctions sous-harmoniques sur Ω quasi-partout égales sont égales en vertu de la non polarité des points de $I(\Omega)$. \square

Nous en déduisons en particulier l'invariance des capacités relatives par extension des scalaires.

PROPOSITION 3.6.14. — *Soit $\Omega \subset X$ un ouvert tel que $\partial\Omega \subset I(X)$. Quelle que soit l'extension non archimédienne K/k , l'image réciproque $p_K^{-1}(\Omega)$ de Ω par la projection canonique $p_K : X \widehat{\otimes}_k K \rightarrow X$ est un ouvert dont la frontière est contenue dans $I(X \widehat{\otimes}_k K)$ et, pour toute partie E de Ω ,*

$$C(p_K^{-1}(E), p_K^{-1}(\Omega)) = C(E, \Omega) \quad \text{et} \quad C^*(p_K^{-1}(E), p_K^{-1}(\Omega)) = C^*(E, \Omega).$$

Démonstration. Soit K/k une extension non archimédienne. L'assertion sur l'ouvert $p_K^{-1}(\Omega)$ découle de la proposition 2.1.21.

L'image réciproque d'un compact $K \subset \Omega$ par la projection canonique $p_K : X \widehat{\otimes}_k K \rightarrow X$ est une partie fermée de $X \widehat{\otimes}_k K$, donc compacte ; on en déduit immédiatement qu'il suffit de

prouver l'égalité

$$C(p_K^{-1}(K), p_K^{-1}(\Omega)) = C(K, \Omega)$$

pour tout compact $K \subset \Omega$. On peut supposer que Ω est connexe (cf. remarque 3.6.1, 3).

L'image réciproque par p_K d'une partie polaire $E \subset \Omega$ est une partie polaire : il existe en effet une fonction sous-harmonique u sur Ω telle que $E \subset \{u = -\infty\}$ (théorème 3.6.11) et, la fonction p_K^*u étant sous-harmonique sur $p_K^{-1}(\Omega)$ (proposition 3.1.14, (ii)), le sous-ensemble $p_K^{-1}(E) \subset \{p_K^*u = -\infty\}$ est bien polaire.

Posons $p_K^{-1}(K) = K'$. La caractérisation de la fonction maximale u_K^* (resp. $u_{K'}^*$) comme unique fonction semi-continue supérieurement sur Ω (resp. $p_K^{-1}(\Omega)$), nulle sur $\partial\Omega$ (resp. $\partial p_K^{-1}(\Omega) \subset p_K^{-1}(\partial\Omega)$), égale à -1 quasi-partout sur K (resp. K') et harmonique sur $\Omega - K$ (resp. $p_K^{-1}(\Omega) - K'$) implique, compte tenu de l'observation précédente, l'égalité

$$u_{K'}^* = p_K^*u_K^*.$$

Il en découle, utilisant la proposition 3.6.5 (i) et le théorème 3.2.10,

$$\begin{aligned} C(p_K^{-1}(K), p_K^{-1}(\Omega)) &= \int_{p_K^{-1}(\Omega)} dd^c u_{K'}^* = \int_{p_K^{-1}(\Omega)} dd^c p_K^* u_K^* \\ &= \int_{\Omega} (p_K)_* dd^c p_K^* u_K^* \\ &= \int_{\Omega} dd^c u_K^* = C(K, \Omega). \end{aligned}$$

□

3.6.2. Métriques capacitaires sur $(\Omega_X^1)^\vee$.

Étant donné un compact strict et non polaire $K \subset X$, les notions et résultats qui précèdent permettent de généraliser le point (ii) de la proposition 3.3.7.

THÉORÈME 3.6.15. — *Il existe, pour tout point $x \in X - K$, une unique fonction*

$$g_{x,K} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

continue au voisinage de x et satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) $g_{x,K}$ est sous-harmonique sur $X - \{x\}$ et harmonique sur $X - (K \cup \{x\})$;
- (ii) $g_{x,K}$ est quasi-nulle sur K ;
- (iii) le courant $dd^c g_{x,K} + \delta_x$ est une mesure de probabilité dont le support est contenu dans K .

Démonstration. L'unicité est une application immédiate du principe du maximum.

L'existence d'une telle fonction se déduit directement des résultats précédents lorsque x est un point de $I(X)$. La fonction extrême u de K relativement à l'ouvert $\Omega = X - \{x\}$ est, en effet, une fonction sous-harmonique sur $X - \{x\}$, identiquement nulle sur toute composante connexe de Ω ne rencontrant pas K et harmonique sur $\Omega - K$. Elle est en outre quasi-partout égale à -1 sur K et le courant $\mu = dd^c(u|_{\Omega})$ est une mesure de Radon positive de support K et de masse $C(K, \Omega) > 0$. La fonction u satisfait donc à l'équation de courants

$$dd^c u = \mu - C(K, \Omega)\delta_x$$

et il suffit ainsi de définir la fonction $g_{x,K}$ par la formule

$$g_{x,K} = C(K, \Omega)^{-1}(1 + u).$$

Le cas d'un point $x \in X - I(X)$ se déduit aisément du précédent en introduisant un point $y \in I(X)$ tel que K soit contenu dans l'ouvert $X - \{y\}$ et disjoint de la composante connexe contenant x . La fonction $g_{x,K}$ est définie par la formule

$$g_{x,K} = g_{y,K} - g_{y,x}$$

où $g_{y,x}$ est l'unique fonction $X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ semi-continue supérieurement qui vérifie

$$\begin{cases} \text{dd}^c g_{y,x} = \delta_x - \delta_y \\ g_{y,x}(y) = 0. \end{cases}$$

□

La fonction $g_{x,K}$ est appelée le *potentiel d'équilibre* de x dans l'ouvert $X - K$. Étant donné un diviseur *effectif* D sur X dont le support est disjoint de K , la formule

$$-\log \|1_D\| = \sum_{x \in |D|} \text{ord}_x(D) [\kappa(x) : k] g_{x,K}$$

définit une métrique sous-harmonique sur le faisceau inversible $\mathcal{O}(D)$ dont la forme de courbure est une mesure de Radon positive portée par K et de masse $\deg(D)$.

Quel que soit le point x de X , nous noterons \underline{x} le $\mathcal{H}(x)$ -point de la courbe $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ canoniquement défini par l'homomorphisme $x : \mathcal{M}(\mathcal{H}(x)) \rightarrow X$; lorsque $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ est identifiée à la fibre de la seconde projection $\text{pr}_2 : X \times X \rightarrow X$ au-dessus de x , le point \underline{x} n'est autre que l'intersection de cette fibre avec la *diagonale* $\Delta_X \subset X \times X$.

Le morphisme canonique $p_x : X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) \rightarrow X$ induit par la première projection $\text{pr}_1 : X \times X \rightarrow X$ si $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ est identifié à la fibre $\text{pr}_2^{-1}(x)$ – donne lieu à un isomorphisme canonique (et tautologique) de $\mathcal{H}(x)$ -espaces vectoriels (de dimension 1)

$$\Omega_X^1[x] \xrightarrow{\sim} \Omega_{X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)}^1[\underline{x}],$$

où

$$\Omega_X^1[x] = x^* \Omega_{X,x}^1 = \Omega_{X,x}^1 \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \mathcal{H}(x)$$

et

$$\Omega_{X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)}^1[\underline{x}] = \underline{x}^* \Omega_{X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)}^1.$$

Étant donné un compact strict et non polaire $K \subset X$, l'observation précédente permet de munir la restriction du faisceau cotangent Ω_X^1 à l'ouvert $X - K$ d'une métrique $\|\cdot\|_K^c$ définie par le développement asymptotique au voisinage de \underline{x} :

$$g_{\underline{x}, p_x^{-1}(K)} + \log |f| = \log \|df\|_K^c(x) + o(1)$$

pour tout point $x \in \Omega - K$ et toute équation locale f de \underline{x} dans $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$.

La métrique duale sur la restriction du faisceau *tangent* $(\Omega_X^1)^\vee$ à l'ouvert $X - K$ est appelée *métrique capacitaire* et encore notée $\|\cdot\|_K^c$. Cette terminologie est justifiée par les considérations qui suivent.

Norme canonique sur $\Omega_X^1[x]$, $x \in I(X)$.

La formule

$$\Omega_X^1 = \mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X)|_{\Delta_X},$$

implique en particulier l'identité des $\mathcal{H}(x)$ -espaces vectoriels

$$\Omega_X^1[x] = x^* \Omega_X^1$$

et

$$\underline{x}^* \mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X) ;$$

par suite, toute $\mathcal{H}(x)$ -norme sur ce dernier espace vectoriel définit une $\mathcal{H}(x)$ -norme sur $\Omega_X^1[x]$.

Soit $x \in X$ un point de type (2) ou (3). Étant donnée une extension non archimédienne K/k , on a défini au paragraphe 2.1.3 (*Extension des scalaires*) un sous-ensemble fini $i_K(x)$ de $p_K^{-1}(x) \subset X \hat{\otimes}_k K$ caractérisé par la propriété suivante : quel que soit le domaine k -affinoïde $Y \subset X$ tel que $\Gamma(Y) = \{x\}$, $i_K(x)$ est le bord de Shilov $\Gamma(Y \hat{\otimes}_k K)$ du domaine K -affinoïde $Y \hat{\otimes}_k K \subset X \hat{\otimes}_k K$.

Dans le cas particulier $K = \mathcal{H}(x)$, $\Omega_x = X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) - i_{\mathcal{H}(x)}(x)$ est un ouvert contenant le point \underline{x} et dont la frontière est contenue dans $I(X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x))$; on peut donc considérer le *potentiel d'équilibre* g_x du point \underline{x} dans Ω_x et la formule

$$-\log \|1_{\Delta_X}\|_{|X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)} = -\log \|1_{[\underline{x}]}\| = g_x$$

munit le faisceau inversible $\mathcal{O}_{X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)}([\underline{x}])$ d'une métrique *continue*. Noter que ce faisceau est la restriction à $\text{pr}_2^{-1}(x)$ du faisceau inversible $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta_X)$ sur $X \times X$; on peut d'ailleurs démontrer que la métrique que l'on vient de définir est la restriction d'une métrique continue sur $\mathcal{O}_{X \times X}(\Delta_X)$ (voir le théorème 5.1.5).

On appelle *norme canonique*, et on note $\|\cdot\|_0(x)$, la $\mathcal{H}(x)$ -norme sur $\Omega_X^1[x]$ correspondant à la norme sur $\mathcal{O}_{X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)}(-[\underline{x}])$ induite par la métrique

$$-\log \|1_{[\underline{x}]}^{\otimes(-1)}\| = \log \|1_{[\underline{x}]}\| = -g_x.$$

LEMME 3.6.16. — *Soit x un point de $I(X)$; la norme canonique sur $\Omega_X^1[x]$ est caractérisée par la propriété suivante : pour toute fonction méromorphe régulière f sur X ,*

$$\log |\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f| + g_x = \log \|df\|_0(x) + o(1)$$

au voisinage du point \underline{x} de $\text{pr}_2^{-1}(x)$.

Démonstration. La condition sur le point x garantit que toute fonction méromorphe régulière f sur X est une section de \mathcal{O}_X au voisinage de x .

La vérification de la formule de l'énoncé est une tautologie : via l'identification

$$\Omega_X^1 = \mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X)_{|\Delta_X},$$

la section méromorphe df de Ω_X^1 correspond à la section méromorphe $(\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f) 1_{\Delta_X}^{\otimes(-1)}$ de $\mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X)$ et

$$\begin{aligned} \log \|df\|_0(x) &= \log \|(\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f) 1_{\Delta_X}^{\otimes(-1)}\|([\underline{x}]) \\ &= \lim_{y \in \text{pr}_2^{-1}(x), y \rightarrow \underline{x}} (\log |\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f|_{|\text{pr}_2^{-1}(x)} - \log \|1_{\Delta_X}\|_{|\text{pr}_2^{-1}(x)})(y) \\ &= \lim_{y \in \text{pr}_2^{-1}(x), y \rightarrow \underline{x}} (\log |\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f|_{|\text{pr}_2^{-1}(x)} + g_x)(y) \end{aligned}$$

en vertu la continuité de la métrique considérée sur $\mathcal{O}_{X \times X}(-\Delta_X)_{|\text{pr}_2^{-1}(x)}$. \square

Nous disposons maintenant, pour tout point $x \in I(X - K)$, de deux normes sur la $\mathcal{H}(x)$ -droite vectorielle $\Omega_X^1[x]$: $\|\cdot\|_K^c(x)$ et la norme canonique $\|\cdot\|_0(x)$. On va voir qu'elles sont reliées par l'intermédiaire de la *capacité relative* $C(K, X - \{x\})$ lorsque le point x vérifie la condition supplémentaire

le sous-ensemble $i_{\mathcal{H}(x)}(x)$ de $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ est réduit à un point.

Cette condition est vérifiée, par exemple, si x est de type (2) et s'il existe une S -courbe lisse géométriquement irréductible \mathcal{X} telle que \mathcal{X}_η soit un domaine k -affinoïde de X de point de Shilov x (c'est le cas si k est algébriquement clos).

PROPOSITION 3.6.17. — *Quel que soit point x dans $I(X - K)$ vérifiant la condition précédente,*

$$\log \|\cdot\|_K^c(x) = \log \|\cdot\|_0(x) + C(K, X - \{x\})^{-1}.$$

Démonstration. Étant donnée une fonction méromorphe régulière f sur X , $(\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f)|_{\text{pr}_2^{-1}(x)}$ est une équation locale de \underline{x} sur $\text{pr}_2^{-1}(x) = X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x)$ et

$$\begin{aligned} \log \|df\|_K^c(x) &= \lim_{y \in \text{pr}_2^{-1}(x), y \rightarrow \underline{x}} \left(\log |\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f|_{\text{pr}_2^{-1}(x)} + g_{\underline{x}, p_x^{-1}K}(y) \right) \\ &= \lim_{y \in \text{pr}_2^{-1}(x), y \rightarrow \underline{x}} \left(\left(\log |\text{pr}_2^* f - \text{pr}_1^* f|_{\text{pr}_2^{-1}(x)} + g_{\underline{x}} \right) + (g_{\underline{x}, p_x^{-1}K} - g_{\underline{x}}) \right)(y) \\ &= \log \|df\|_0(x) + \lim_{y \in \text{pr}_2^{-1}(x), y \rightarrow \underline{x}} (g_{\underline{x}, p_x^{-1}K} - g_{\underline{x}})(y). \end{aligned}$$

En vertu du lemme suivant,

$$\lim_{y \in \text{pr}_2^{-1}(x), y \rightarrow \underline{x}} (g_{\underline{x}, p_x^{-1}K} - g_{\underline{x}})(y) = p_x^* g_{x,K}(\underline{x}) = g_{x,K}(x);$$

puisque $g_{x,K}(x) = C(K, X - \{x\})^{-1}$ (voir la démonstration du théorème 3.6.15), nous obtenons finalement la formule

$$\log \|\cdot\|_K^c(x) = \log \|\cdot\|_0(x) + C(K, X - \{x\})^{-1}.$$

□

LEMME 3.6.18. — *Sous les mêmes hypothèses que la proposition 3.6.17,*

$$g_{\underline{x}, p_x^{-1}(K)} = p_x^* g_{x,K} + g_{\underline{x}}.$$

Démonstration. Notons y l'unique point de $i_{\mathcal{H}(x)}(x)$. Vu la définition des potentiels d'équilibre, la fonction $p_x^* g_{x,K}$ est harmonique sur $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) - (p_x^{-1}(K) \cup \{y\})$, quasi nulle sur $p_x^{-1}(K)$, égale à $C(K, X - \{x\})^{-1}$ au point y et

$$\text{Supp}(\text{dd}^c p_x^* g_{x,K} + \delta_y) \subset p_x^{-1}(K).$$

La fonction $g_{\underline{x}}$ est, elle, harmonique sur $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) - \{y, \underline{x}\}$, nulle au point y et $\text{dd}^c g_{\underline{x}} = \delta_y - \delta_{\underline{x}}$.

Les observations précédentes impliquent immédiatement que la fonction $p_x^* g_{x,K} + g_{\underline{x}}$ est le potentiel d'équilibre de \underline{x} dans $X \hat{\otimes}_k \mathcal{H}(x) - p_x^{-1}K$. □

Nous noterons encore $\|\cdot\|_0(x)$ et $\|\cdot\|_K^c(x)$ les normes sur la $\mathcal{H}(x)$ -droite vectorielle $(\Omega_X^1)^\vee[x] = (\Omega_X^1[x])^\vee$ duales des normes $\|\cdot\|_0(x)$ et $\|\cdot\|_K^c(x)$ sur $\Omega_X^1[x]$ respectivement. Elles sont reliées par la formule suivante :

$$\log \|\cdot\|_K^c(x) = \log \|\cdot\|_0(x) + C(K, X - \{x\})^{-1}.$$

COROLLAIRE 3.6.19. — *Soit x un point dans $I(X)$ tel que l'ensemble $i_{\mathcal{H}(x)}(x)$ soit réduit à un point. Quel que soit l'élément non nul t de $(\Omega_X^1)^\vee[x]$, la fonction*

$$K \mapsto \|t\|_K^c$$

est une capacité (au sens de Choquet) sur l'ensemble des compacts de $X - \{x\}$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la formule

$$||t||_K^c(x) = ||t||_0(x) \exp(-C(K, X - \{x\})^{-1})$$

et du fait que, $C(., X - \{x\})$ étant une capacité de Choquet sur les compacts de $X - \{x\}$ et la fonction

$$\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad x \mapsto e^{-1/x}$$

étant croissante, $\exp(-C(., X - \{x\})^{-1})$ est encore une capacité. \square

Soient enfin x un point dans $(X - K)(k)$ et f une équation locale de x dans X . Considérons un voisinage strictement k -affinoïde V de x dans X n'ayant qu'un seul point de Shilov x' , lequel satisfait de plus à la condition $|\mathcal{H}(x)^\times| = |k^\times|$, et tel que f soit inversible sur $V - \{x\}$; on normalise f de telle sorte que $|f(x')| = 1$. Le potentiel d'équilibre $g_{x,K}$ de x dans $X - K$ s'écrit

$$g_{x,K} = g_{x',K} - g_{x',x},$$

où $g_{x',x}$ est la fonction égale à $\log |f|$ sur V' et 0 sur $X - V'$. On a donc

$$\begin{aligned} \log ||df||_K^c &= \lim_{y \rightarrow x} (\log |f| + g_{x,K})(y) \\ &= \lim_{y \rightarrow x} g_{x',K}(y) \\ &= g_{x',K}(x') \\ &= C(K, X - \{x'\})^{-1}. \end{aligned}$$

Observant que tout point $x \in X(k)$ admet un système fondamental de voisinages strictement k -affinoïdes isomorphes au disque unité – donc ayant un seul point de Shilov x' , lequel vérifie $\text{Card}(i_{\mathcal{H}(x')}(x')) = 1$ – nous déduisons le théorème suivant des résultats du paragraphe 3.6.1 (propositions 3.6.5 et 3.6.8, théorème 3.6.11).

THÉORÈME 3.6.20. — *Quels que soient le point $x \in X(k)$ et l'élément non nul $t \in (\Omega_X^1)^\vee[x]$, la fonction*

$$\{\text{compacts } K \subset X - \{x\}\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad K \mapsto \begin{cases} ||t||_K^c & \text{si } K \text{ n'est pas polaire} \\ 0 & \text{si } K \text{ est polaire,} \end{cases}$$

donne naissance à une capacité $\text{Cap}_{x,t}$ (au sens de Choquet) sur l'ensemble des parties de $X - \{x\}$ en posant

$$\text{Cap}_{x,t}(\Omega) = \sup\{||t||_K^c ; K \subset \Omega, K \text{ compact}\}$$

pour tout ouvert $\Omega \subset X - \{x\}$ et

$$\text{Cap}_{x,t}(E) = \inf\{\text{Cap}_{x,t}(\Omega) ; E \subset \Omega, \Omega \subset X - \{x\} \text{ ouvert}\}$$

pour toute partie E de $X - \{x\}$.

On a

$$\text{Cap}_{x,t}(K) = ||t||_K^c$$

pour tout compact $K \subset X - \{x\}$ et une partie E de $X - \{x\}$ est polaire si et seulement si $\text{Cap}_{x,t}(E) = 0$.

Remarque 3.6.21. — Dans le théorème précédent, la restriction $x \in X(k)$ est superflue.

3.6.3. Exemple et application.

Nous concluons cette section par un exemple de calcul de capacités et une application.

Nous supposons ici que la valuation de k est discrète et posons $R = k^\circ$, $\mathfrak{m} = k^\circ$, $S = \text{Spf}(R)$. Notons également $q = \text{Card}(\tilde{k})$ et $\log |k^\times| = \mathbb{Z}\ell \subset \mathbb{R}$, $\ell \geq 0$.

Soit \mathcal{X} une S -courbe propre et régulière dont la fibre générique $X = \mathcal{X}_\eta$ est lisse et dont la fibre spéciale \mathcal{X}_s est un diviseur à croisements normaux simple (les composantes irréductibles de $\mathcal{X}_s^{\text{red}}$ sont régulières); on note r l'application de réduction $X \rightarrow \mathcal{X}_s$.

LEMME 3.6.22. — *L'application r envoie l'ensemble $\mathcal{X}(R) = X(k)$ sur l'ensemble des \tilde{k} -points réguliers de \mathcal{X}_s .*

Démonstration. Soient x un point dans $\mathcal{X}(R)$, $x^* : \mathcal{O}_{\mathcal{X}, r(x)} \rightarrow R$ le morphisme correspondant et (t_1, t_2) un système de paramètres sur \mathcal{X} en $r(x)$ tel que $\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathcal{X}, r(x)} = t_1^{n_1}t_2^{n_2}\mathcal{O}_{\mathcal{X}, r(x)}$. L'idéal $\mathfrak{m} = x^*\mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathcal{X}, r(x)}$ de R étant engendré par les éléments x^*t_1, x^*t_2 , l'identité

$$1 = n_1v(x^*t_1) + n_2v(x^*t_2),$$

obtenue en appliquant la valuation \mathfrak{m} -adique v , implique $n_1 = 0, n_2 = 1$ ou $n_1 = 1, n_2 = 0$; $r(x)$ est donc un point régulier de \mathcal{X}_s .

Réciproquement, l'anneau local R étant complet, tout \tilde{k} -point lisse de \mathcal{X}_s se relève en un R -point de \mathcal{X} . \square

Notons $\text{Rég}(\mathcal{X}_s)$ l'ouvert des points réguliers de la \tilde{k} -courbe algébrique \mathcal{X}_s et introduisons l'application

$$\xi : \text{Rég}(\mathcal{X}_s)(\tilde{k}) \rightarrow S_0(\mathcal{X})$$

telle que $r(\xi(\tilde{x}))$ soit le point générique de la composante irréductible de $\mathcal{X}_s^{\text{red}}$ contenant \tilde{x} .

Intermède. Le graphe dual de la courbe nodale $\mathcal{X}_s^{\text{red}}$ porte une structure naturelle de polyèdre entier : à un point singulier \tilde{x} de $\mathcal{X}_s^{\text{red}}$ appartenant à des composantes irréductibles de multiplicités n_1 et n_2 dans \mathcal{X} est associé le polytope entier de groupe structural

$$(\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}t'_1 \oplus \mathbb{Z}t'_2) / \mathbb{Z}(t'_1 + t'_2 - \ell/n_1n_2).$$

On note encore $S(\mathcal{X})$ ce polyèdre entier, qui coïncide avec celui précédemment défini lorsque \mathcal{X} est (simplement) semi-stable. On peut montrer de nouveau qu'il s'identifie naturellement à un fermé de \mathcal{X}_η et que l'on dispose d'une rétraction $\tau_{\mathcal{X}} : \mathcal{X}_\eta \rightarrow S(\mathcal{X})$. La structure de polyèdre entier sur $S(\mathcal{X})$ est compatible à la théorie du potentiel sur \mathcal{X}_η , au sens où

$$\text{dd}^c(\varphi \circ \tau_{\mathcal{X}}) = \text{dd}^c\varphi$$

pour toute fonction lisse $\varphi \in A^0(S(\mathcal{X}))$.

Étant donné un point singulier \tilde{x} de $\mathcal{X}_s^{\text{red}}$ au voisinage duquel la fibre spéciale \mathcal{X}_s est définie par $t_1^{n_1}t_2^{n_2} \in \mathfrak{m}\mathcal{O}_{\mathcal{X}, \tilde{x}}^\times$, la fonction $-\log |t_1|$ vérifie l'équation

$$\text{dd}^c(-\log |t_1|) = n_2(\delta_x - \delta_y)$$

où x (resp. y) est le point de $S_0(\mathcal{X}) \subset S(\mathcal{X})$ correspondant à la composante irréductible de \mathcal{X}_s d'équation $t_2 = 0$ (resp. $t_1 = 0$).

Quel que soit le point $\tilde{x} \in \text{Rég}(\mathcal{X}_s)(\tilde{k})$, l'ensemble

$$K_{\tilde{x}} = r^{-1}(\tilde{x}) \cap \mathcal{X}(R) = \overline{r^{-1}(\tilde{x})} \cap \mathcal{X}(R)$$

est un compact contenu dans l'ouvert $r^{-1}(\tilde{x})$.

PROPOSITION 3.6.23. — *Quel que soit le point $\tilde{x} \in \text{Rég}(\mathcal{X}_s)(\tilde{k})$,*

$$C(K_{\tilde{x}}, r^{-1}(\tilde{x})) = C(K_{\tilde{x}}, X - \{\xi(\tilde{x})\}) = C(K_{\tilde{x}}, X - S_0(\mathcal{X})) = C(K_{\tilde{x}}, X - S(\mathcal{X})) = \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Démonstration. Nous allons déterminer explicitement la fonction extrême u^* du compact $K_{\tilde{x}}$. Posons $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$ et soit \mathcal{X}_1 la S -courbe obtenue en éclatant le point \tilde{x} dans \mathcal{X} . C'est une S -courbe régulière dont la fibre spéciale est encore un diviseur à croisement normaux simple et telle que $\mathcal{X}_{1,s} - \mathcal{X}_s$ soit la droite affine sur $\kappa(\tilde{x}) = \tilde{k}$.

Définissons par récurrence \mathcal{X}_{n+1} comme la S -courbe obtenue en éclatant tous les \tilde{k} -points de la S -courbe $\mathcal{X}_n - \mathcal{X}_{n-1}$, $n \geq 1$. Étant donné $n \geq 1$, le squelette de \mathcal{X}_{n+1} s'obtient à partir de celui de \mathcal{X}_n en attachant $\text{Card}(\mathbb{A}^1(\tilde{k})) = q$ copies du polytope entier

$$\{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 ; t_1, t_2 \geq 0 \text{ et } t_1 + t_2 = -\log |\pi| = \ell\}$$

(π désigne un générateur de l'idéal \mathfrak{m}) à chaque point de $S(\mathcal{X}_n)$ correspondant à une composante irréductible de $\mathcal{X}_{n,s} - \mathcal{X}_{n-1,s}$. La réunion $T_{\tilde{x}}$ de ces squelettes est un arbre infini plongé dans $\overline{r^{-1}(\tilde{x})} \subset \mathcal{X}_n$, de racine $\xi(\tilde{x})$, dont $K_{\tilde{x}}$ est l'ensemble des extrémités et sur lequel $\overline{r^{-1}(\tilde{x})} - K_{\tilde{x}}$ se rétracte.

Il est facile de voir qu'il existe une fonction sous-harmonique U sur $T_{\tilde{x}}$ qui s'annule à la racine $\xi(\tilde{x})$, est harmonique sur $T_{\tilde{x}} - K_{\tilde{x}}$ et vaut identiquement -1 sur $K_{\tilde{x}}$: étant donné un point $x \in K_{\tilde{x}}$, sa restriction à la demi-droite $[0, +\infty[= [\xi(\tilde{x}), x[\subset T_{\tilde{x}}$ est la fonction continue, affine par morceaux et convexe U_x telle que

- U_x soit affine sur $[0, \infty[- \mathbb{N}\ell$;
- $U_x(0) = 0$;
- pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée de U à gauche (resp. à droite) au point $n\ell$ est $-\lambda/q^{n-1}$ (resp. $-\lambda/q^n$),

où le nombre réel strictement positif λ est choisi tel que la limite

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} U_x(t) = -\lambda \ell \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\frac{1}{q}\right)^n = -\lambda \ell \left(1 - \frac{1}{q}\right)^{-1}$$

soit égale à -1 . La dérivée à droite de U_x au point $\xi(\tilde{x})$ est donc

$$-\lambda = -\frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

La masse totale de la mesure positive $\text{dd}^c U$ sur l'ouvert $T_{\tilde{x}} - \{\xi(\tilde{x})\}$ de $T_{\tilde{x}}$ est égale à

$$\int_{T_{\tilde{x}} - \{\xi(\tilde{x})\}} \text{dd}^c U = - \int_{\{\xi(\tilde{x})\}} \text{dd}^c U = \lambda = \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Notons $\tau_{\tilde{x}} : \overline{r^{-1}(\tilde{x})} \rightarrow T_{\tilde{x}}$ la rétraction. La fonction $U \circ \tau_{\tilde{x}}$ est sous-harmonique sur l'ouvert $r^{-1}(\tilde{x})$ (remarque 3.4.7), harmonique sur $r^{-1}(\tilde{x}) - (K_{\tilde{x}} \cup \{\xi(\tilde{x})\})$, nulle au point $\xi(\tilde{x})$ et identiquement égale à -1 sur le compact $K_{\tilde{x}}$; c'est donc la fonction d'équilibre $u_{K_{\tilde{x}}}^*$ de ce dernier dans $r^{-1}(\tilde{x})$ et $\text{dd}^c u_{K_{\tilde{x}}}^* = (\text{dd}^c U)|_{T_{\tilde{x}} - \{\xi(\tilde{x})\}}$. On obtient ainsi :

$$C(K_{\tilde{x}}, r^{-1}(\tilde{x})) = \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Les autres égalités se déduisent de celle-ci car $r^{-1}(\tilde{x})$ est l'unique composante connexe de $X - S(\mathcal{X})$ rencontrant $K_{\tilde{x}}$ (cf. remarque 3.6.1, 3). \square

COROLLAIRE 3.6.24. — Pour tout ouvert U de $\mathcal{X}_s^{\text{red}}$, $K_U = r^{-1}(U) \cap \mathcal{X}(R)$ est un compact et

$$C(K_U, X - S_0(\mathcal{X})) = C(K_U, X - S(\mathcal{X})) = \text{Card}(\text{Rég}(\mathcal{X}_{s|U}))(\tilde{k}) \frac{1}{\ell} \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Démonstration. Soit U' l'ouvert des points réguliers de $\mathcal{X}_{s|U}$. Étant donné $\tilde{x} \in U'(\tilde{k})$, la fonction extrémale $g_{\tilde{x}}$ du compact $K_{\tilde{x}}$ dans $X - S_0(\mathcal{X})$ (ou $X - S(\mathcal{X})$) est simplement le prolongement par 0 de la fonction extrémale de $K_{\tilde{x}}$ dans $r^{-1}(\tilde{x})$ considérée à la proposition précédente. Les égalités annoncées découlent alors de la formule

$$u_{K_U}^* = \sum_{\tilde{x} \in U'_s(\tilde{k})} g_{\tilde{x}}$$

dont la vérification est immédiate (on peut aussi invoquer le point 3 de la remarque 3.6.1). \square

Le calcul de la capacité des compacts $K_{\tilde{x}}$ et K_U relativement à un ouvert de la forme $X - \{\xi\}$, $\xi \in S(\mathcal{X})$, se déduit de ce qui précède et de la théorie du potentiel sur le polyèdre entier $S(\mathcal{X})$.

Nous conservons les notations précédentes : pour tout point $\tilde{x} \in \text{Rég}(\mathcal{X}_s)(\tilde{k})$, $g_{\tilde{x}}$ est la fonction extrémale du compact $K_{\tilde{x}}$ dans $X - S(\mathcal{X})$. C'est une fonction continue, harmonique sur le complémentaire de $S(\mathcal{X}) \cup K_{\tilde{x}}$, identiquement nulle sur $S(\mathcal{X})$ et identiquement égale à -1 sur $K_{\tilde{x}}$. Elle vérifie l'équation

$$\text{dd}^c g_{\tilde{x}} = -C(K_{\tilde{x}}, X - S(\mathcal{X})) \delta_{\xi(\tilde{x})} + \nu_{\tilde{x}},$$

dans laquelle $\nu_{\tilde{x}}$ est une mesure de probabilité de support $K_{\tilde{x}}$.

Soit $S'_0(\mathcal{X})$ l'ensemble des points de $S_0(\mathcal{X})$ correspondant à des composantes irréductibles génériquement lisses de \mathcal{X}_s et soit $U(\zeta)$ l'ensembles des \tilde{k} -points lisses de \mathcal{X}_s appartenant à $\{r(\zeta)\}$ ($\zeta \in S'_0(\mathcal{X})$) ; on pose

$$g_{\zeta} = \sum_{\tilde{x} \in U(\zeta)} g_{\tilde{x}}.$$

Introduisons enfin, pour tout point $x \in S'_0(\mathcal{X}) \cup \{\xi\}$, la fonction h_x sur $S(\mathcal{X})$ qui est harmonique en dehors de $S'_0(\mathcal{X}) \cup \{\xi\}$, vaut 1 au point x et s'annule aux autres points de $S'_0(\mathcal{X}) \cup \{\xi\}$.

La fonction extrémale g de $\mathcal{X}(R)$ dans $X - \{\xi\}$ est telle que $g + 1$ soit identiquement nulle sur $\mathcal{X}(R)$ et harmonique sur $X - (S(\mathcal{X}) \cup \mathcal{X}(R))$; sa restriction à l'ouvert $r^{-1}(U(\zeta))$ est par conséquent la fonction $(1 + g(\zeta))(1 + g_{\zeta})$. Sa restriction à $S(\mathcal{X})$, harmonique en dehors de $S'_0(\mathcal{X}) \cup \{\xi\}$, s'écrit sous la forme

$$h = \sum_{x \in S'_0(\mathcal{X}) \cup \{\xi\}} g(x) h_x = h_{\xi} + \sum_{\zeta \in S'_0(\mathcal{X}) - \{\xi\}} g(\zeta) h_{\zeta}$$

et les $\text{Card}(S'_0(\mathcal{X}) - \{\xi\})$ coefficients $g(\zeta)$ sont déterminés par les $\text{Card}(S'_0(\mathcal{X}) - \{\xi\})$ conditions

$$\int_{\{\zeta\}} \text{dd}^c h = -g(\zeta) C(r^{-1}(U(\zeta)) \cap \mathcal{X}(R), X - S(\mathcal{X})),$$

$\zeta \in S'_0(\mathcal{X}) - \{\xi\}$, traduisant l'harmonicité de g au points de $S'_0(\mathcal{X}) - \{\xi\}$.

Le calcul de $C(\mathcal{X}(R), X - \{\xi\})$ est ainsi réduit à de l'algèbre linéaire. On effectue de la même manière le calcul de $C(\mathcal{X}(R) \cap r^{-1}(U), X - \{\xi\})$ pour toute partie U de l'ensemble $\text{Rég}(\mathcal{X}_s)$. Voici le cas où U est réduit à un point.

PROPOSITION 3.6.25. — *Quels que soient les points $\xi \in S_0(\mathcal{X})$ et $\tilde{x} \in \text{Rég}(\mathcal{X}_s)(\tilde{k})$,*

$$C(K_{\tilde{x}}, X - \{\xi\}) = \frac{C(K_{\tilde{x}}, X - S(\mathcal{X}))C(\{\xi(\tilde{x})\}, X - \{\xi\})}{C(\{\xi(\tilde{x})\}, X - \{\xi\}) + C(K_{\tilde{x}}, X - S(\mathcal{X}))}.$$

Démonstration. La fonction extrême g de $\mathcal{K}_{\tilde{x}}$ dans $X - \{\xi\}$ s'écrit

$$g = (1 + g) - 1 = (a(1 + g_{\tilde{x}}) + (1 - a)h) - 1$$

où $a = g(\xi(\tilde{x}))$ et h est la fonction continue qui est harmonique sur $X - \{\xi(\tilde{x}), \xi\}$, vaut 0 en $\xi(\tilde{x})$ et 1 en ξ . Le coefficient a est déterminé par l'équation

$$0 = \int_{\{\xi(\tilde{x})\}} dd^c g = a \int_{\{\xi(\tilde{x})\}} dd^c g_{\tilde{x}} + (1 - a) \int_{\{\xi\}} dd^c h$$

soit

$$\begin{aligned} 0 &= -aC(K_{\tilde{x}}, X - S(\mathcal{X})) + (1 - a)C(\{\xi(\tilde{x})\}, X - \{\xi\}) \\ a &= \frac{C(\{\xi(\tilde{x})\}, X - \{\xi\})}{C(\{\xi(\tilde{x})\}, X - \{\xi\}) + C(K_{\tilde{x}}, X - S(\mathcal{X}))}. \end{aligned}$$

Le résultat en découle puisque

$$C(K_{\tilde{x}}, X - \{\xi\}) = - \int_{\{\xi\}} dd^c g = -(1 - a) \int_{\{\xi\}} dd^c h = (1 - a)C(\{\xi(\tilde{x})\}, X - \{\xi\}).$$

□

Nous achevons cette section en donnant une application des considérations relatives aux capacités.

THÉORÈME 3.6.26. — *Une fonction sous-harmonique sur une courbe strictement k -analytique lisse X est uniquement déterminée par sa restriction au sous-ensemble*

$$X_0 = \{x \in X ; [\kappa(x) : k] < \infty\}.$$

Comme dans la théorie archimédienne, toute courbe strictement k -analytique lisse X peut-être munie de la *topologie fine* : c'est la plus grossière des topologies sur X qui raffinent la topologie usuelle et pour lesquelles les germes de fonctions sous-harmoniques sont continus. On obtient une base de la topologie fine sur X en considérant les ensembles

$$\{x \in \Omega ; \lambda_1 < u_1(x), \dots, \lambda_n < u_n(x)\}$$

où Ω est un ouvert (usuel) de X , u_1, \dots, u_n sont des fonctions sous-harmoniques sur Ω et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels.

Le théorème 3.6.26 se déduit de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.6.27. — *Le sous-ensemble X_0 est dense pour la topologie fine sur une courbe strictement k -analytique lisse X .*

Démonstration. Soient Ω un ouvert de X , u_1, \dots, u_n des fonctions sous-harmoniques sur Ω et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des nombres réels tels que l'ouvert fin

$$U = \{x \in \Omega ; \lambda_1 < u_1, \dots, \lambda_n < u_n\}$$

soit non vide.

Observons tout d'abord qu'il existe un point de $I(X)$ appartenant à Ω : on a en effet vu au cours de la démonstration du lemme 3.4.1 que la valeur en un point $y \in X - I(X)$ d'une fonction sous-harmonique u sur X était la borne inférieure des valeurs de u sur le bord de Shilov des voisinages k -affinoïdes de y .

Supposons maintenant que U soit disjoint de X_0 et déduisons-en une contradiction. Soient x un point dans $U \cap I(X)$ et Ω' une composante connexe relativement compacte de $X - \{x\}$ contenue dans Ω . On peut supposer que les fonctions u_i s'annulent au point x . Notant λ le maximum des λ_i , $1 \leq i \leq n$, la fonction sous-harmonique $u = u_1 + \dots + u_n$ est nulle en x et majorée par λ sur $E = \Omega'_0$; elle est donc majorée par $|\lambda|u_E^*$ sur Ω' , u_E^* étant la fonction extrémale relative de E dans Ω' .

Considérons un compact K dans $E = \Omega'_0$; les inégalités

$$u \leq u_E^* \leq u_K^*$$

et l'égalité

$$u(x) = u_K^*(x)$$

impliquent la majoration

$$C(K, \Omega') = \int_{\Omega'} dd^c u_K^* \leq \int_{\Omega'} dd^c u;$$

la contradiction recherchée découle ainsi de l'existence de compacts $K \subset \Omega'_0$ de capacité relative arbitrairement grande. Ce fait se déduit du lemme suivant et de la proposition 3.6.29. \square

LEMME 3.6.28. — *Pour tout ouvert $\Omega \subset X$ tel que $\partial\Omega$ soit une partie non vide de $I(X)$,*

$$\sup\{C(V, \Omega) ; V \subset \Omega \text{ domaine affinoïde}\} = +\infty.$$

Démonstration. Étant donné un point x dans $I(\Omega)$, le potentiel d'équilibre g de x dans Ω est une fonction continue, nulle sur $X - \Omega$ et telle que $dd^c g|_{\Omega} = -\delta_x$. La fonction maximale u du compact $\{x\}$ dans Ω étant donnée par la formule

$$u = -g(x)^{-1}g,$$

l'identité

$$C(\{x\}, \Omega) = \int_{\Omega} dd^c u = |g(x)|^{-1}$$

qui en découle implique que $C(\{x\}, \Omega)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $\partial\Omega$. La démonstration du lemme s'achève en considérant un domaine k -affinoïde V dans Ω tel $\Gamma(V) = \{x\}$ et en utilisant la formule $C(V, \Omega) = C(\Gamma(V), \Omega)$ de la proposition 3.6.3. \square

PROPOSITION 3.6.29. — *Pour tout ouvert $\Omega \subset X$ tel que $\partial\Omega$ soit une partie non vide de $I(X)$ et pour tout domaine k -affinoïde $V \subset \Omega$,*

$$C(V \cap X_0, \Omega) = \sup\{C(K, \Omega) ; K \text{ compact et } K \subset V\} = C(V, \Omega).$$

Démonstration. Un domaine k -affinoïde étant la limite d'une suite croissante de domaines strictement k -affinoïdes, il est loisible de supposer que V est un domaine strictement k -affinoïde. Il est également clair que l'on peut effectuer une extension finie de k , ce qui permet de supposer que V est la fibre générique d'une S -courbe semi-stable dont chaque composante irréductible contient un \tilde{k} -point lisse.

Notons Σ' le support de la mesure $dd^c u_V^*$ (u_V^* est la fonction maximale de V dans Ω) ; c'est un sous-ensemble de $\Gamma(V)$.

Choisissons un \tilde{k} -point lisse dans chacune des composantes irréductibles de \mathcal{X}_s correspondant à un élément de Σ' et soit $\Sigma \subset \mathcal{X}_s(\tilde{k})$ le sous-ensemble fini ainsi obtenu. Posant $U = r^{-1}(\Sigma)$, on a

$$C(\overline{U}, \Omega) = C(V, \Omega).$$

L'inégalité $C(V, \Omega) \geq C(\overline{U}, \Omega)$ est en effet triviale et la réciproque découle de

$$C(V, \Omega) = C(\Sigma', \Omega) \leq C(\overline{U}, \Omega),$$

l'égalité provenant de la proposition 3.6.3, l'inégalité de l'inclusion $\Gamma(V) \subset \overline{U}$.

Étant donné un élément a de k tel que $0 < |a| < 1$ et un sous-ensemble fini $F \subset \tilde{k}$, on construit une suite de S -courbes simplement semi-stables \mathcal{X}_n , dominant \mathcal{X} , de la manière suivante.

- $\mathcal{X}_0 = \mathcal{X}$.
- La courbe \mathcal{X}_1 est obtenue en éclatant un Idéal \mathcal{I}_1 tel que $\mathcal{I}_1 = \mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ sur $\mathcal{X} - \Sigma$ et, pour tout point $\tilde{x} \in \Sigma$,

$$\mathcal{I}_{1,\tilde{x}} = f_{\tilde{x}} \mathcal{O}_{\mathcal{X},\tilde{x}} + a \mathcal{O}_{\mathcal{X},\tilde{x}},$$

$f_{\tilde{x}}$ relevant dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X},\tilde{x}}$ un générateur de $\mathfrak{m}_{\tilde{x}} \mathcal{O}_{\mathcal{X},\tilde{x}}$. Les composantes exceptionnelles de $\mathcal{X}_{1,s}$ sont des \tilde{k} -droites projectives et on identifie chaque composante connexe de $\mathcal{X}_{1,s} - \mathcal{X}_{0,s}$ à $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$.

- Pour $n \geq 1$, la courbe \mathcal{X}_n est simplement semi-stable et les composantes connexes de $\mathcal{X}_{n,s} - \mathcal{X}_{n-1,s}$ sont identifiées à $\mathbb{A}_{\tilde{k}}^1$; la réunion des sous-ensembles finis $F \subset \mathbb{A}^1(\tilde{k})$ est un fermé F_n de $\mathcal{X}_{n,s}$ rencontrant chacune des composantes connexes de $\mathcal{X}_{n,s} - \mathcal{X}_{n-1,s}$. On obtient alors \mathcal{X}_{n+1} à partir de \mathcal{X}_n en éclatant un Idéal \mathcal{I}_n tel que $\mathcal{I}_n = \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n}$ sur $\mathcal{X}_n - F_n$ et, pour tout point $\tilde{x} \in F_n$,

$$\mathcal{I}_{n,\tilde{x}} = f_{\tilde{x}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n,\tilde{x}} + a \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n,\tilde{x}},$$

$f_{\tilde{x}}$ relevant dans $\mathcal{O}_{\mathcal{X}_n,\tilde{x}}$ un générateur de $\mathfrak{m}_{\tilde{x}} \mathcal{O}_{\mathcal{X}_n,\tilde{x}}$.

Les squelettes des courbes simplement semi-stables \mathcal{X}_n forment naturellement un système inductif dont la limite est la réunion de $S(\mathcal{X})$ et de $\text{Card}(\Sigma)$ arbres infinis $T_{\tilde{x}}$, $\tilde{x} \in \Sigma$, dont les racines sont les points de $\Gamma(V)$. L'ensemble des extrémités de ces arbres est une partie compacte K de $X(k) \cap r^{-1}(\Sigma)$ et le calcul effectué pour démontrer la proposition 3.6.25, de nature purement combinatoire, se transcrit tel quel; on a donc

$$C(K, V - \Gamma(V)) = -\frac{1}{\log |a|} \text{Card}(\Sigma) \left(1 - \frac{1}{\text{Card}(F)} \right).$$

Remplaçant k par une extension finie, on peut faire tendre $|a|$ vers 0 dans la formule précédente et déduire de ce calcul qu'il existe des compacts dans $\Omega \cap X_0$ de capacité arbitrairement grande relativement à $V - \Gamma(V)$.

On vérifie, à l'aide des potentiels d'équilibre, qu'il existe un nombre réel strictement positif λ tel que, pour chacun des compacts K construits en faisant varier $|a|$,

$$C(K, \Omega)^{-1} \leq \lambda C(K, V - \Gamma(V))^{-1} + C(V, \Omega)^{-1}.$$

Il en résulte que $C(K, \Omega)$ tend vers $C(V, \Omega)$ lorsque $|a|$ tend vers 0, ce qui achève la démonstration de la proposition. \square

COROLLAIRE 3.6.30. — *La fonction maximale d'un domaine k -affinoïde $V \subset \Omega$ est l'enveloppe inférieure de la famille (décroissante) des fonctions maximales des compacts $K \subset V_0$.*

4. APPLICATION À LA THÉORIE D'ARAKELOV

4.1. Diviseurs d'Arakelov

Nous considérons dans cette partie une courbe algébrique X propre et lisse sur \mathbb{Q} .

4.1.1. Conventions.

Nous adoptons les conventions et notations suivantes.

La place archimédienne est notée ∞ et les places non archimédiennes sont identifiées aux nombres premiers. L'ensemble des places de \mathbb{Q} se note $M(\mathbb{Q})$; $|\cdot|_\infty$ est la valeur absolue usuelle sur \mathbb{Q} et, pour tout nombre premier p , la valeur absolue p -adique est normalisée par la condition $|p|_p = p^{-1}$. Nous noterons \mathbb{Q}_v la complétion de \mathbb{Q} pour la valeur absolue $|\cdot|_v$.

Pour toute place v de \mathbb{Q} , X_v désignera l'espace \mathbb{Q}_v -analytique associé à la \mathbb{Q}_v -courbe algébrique $X \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v$. L'espace X_∞ est toujours envisagé comme la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$ munie de la conjugaison complexe F_∞ .

On dispose d'un morphisme canonique d'espaces localement annelés $\text{pr}_v : X_v \rightarrow X$ induisant un homomorphisme injectif $\text{pr}_v^* : \text{Div}(X) \hookrightarrow \text{Div}(X_v)$ tel que

$$\text{pr}_v^*[x] = \sum_{y \in \text{pr}_v^{-1}(x)} [y]$$

pour tout point fermé x de X .

Une *courbe* au-dessus d'un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ est un schéma de type fini, séparé et plat sur U , dont les fibres sont purement de dimension 1.

Étant donnée une courbe \mathcal{X} sur un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et une place v de \mathbb{Q} associée à un point fermé de U , \mathcal{X}_v désignera la $\text{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -courbe formelle obtenue par complétion de \mathcal{X} le long de sa fibre au-dessus du point fermé $s(v)$ de U associé à v . La fibre spéciale de \mathcal{X}_v est la $\kappa(s(v))$ -courbe $\mathcal{X}_{s(v)}$.

Pour tout \mathcal{O}_X -Module \mathcal{F} et toute place $v \in M(\mathbb{Q})$, nous noterons \mathcal{F}_v le \mathcal{O}_{X_v} -Module $\text{pr}_v^* \mathcal{F} = \mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_v}$.

Nous noterons $A^0(X_\infty)$ l'espace vectoriel des fonctions complexes de classes C^∞ sur la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$ qui sont invariantes sous l'action de la conjugaison complexe et $W^1(X_\infty)$ désignera l'espace vectoriel topologique complétion de $A^0(X_\infty)$ pour la forme quadratique

$$\int_{X(\mathbb{C})} |\varphi|^2 \mu + \frac{i}{2\pi} \int_{X(\mathbb{C})} \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi = \int_{X(\mathbb{C})} |\varphi|^2 \mu - \int_{X(\mathbb{C})} \varphi \, dd^c \varphi,$$

où μ est une 2-forme continue et définie positive sur la surface de Riemann compacte $X(\mathbb{C})$. Reprenant les notations de l'article [11], $W^1(X_\infty)$ est le sous-espace des points fixes de la conjugaison complexe dans

$$\bigoplus_{X' \in \pi_0(X(\mathbb{C}))} L_1^2(X', \mathbb{R}).$$

Nous noterons enfin $A^1(X_\infty)$ l'espace vectoriel réel des 2-formes différentielles sur $X(\mathbb{C})$ qui sont invariantes par la conjugaison complexe et s'écrivent localement

$$\varphi \frac{i}{\pi} dz \wedge d\bar{z},$$

où z est une coordonnée locale sur la surface de Riemann $X(\mathbb{C})$ et φ est une fonction réelle de classe C^∞ . L'opérateur

$$\mathrm{dd}^c = \frac{i}{\pi} \partial \bar{\partial}$$

envoie $A^0(X_\infty)$ dans $A^1(X_\infty)$.

4.1.2. Diviseurs d'Arakelov lisses.

Étant donné un diviseur D sur X , une *fonction de Green lisse* pour D est une famille $g = (g_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ de fonctions continues $g_v : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

- (i) pour toute place $v \in M(\mathbb{Q})$, le courant $\mathrm{dd}^c g_v + \delta_{\mathrm{pr}_v^* D}$ est une forme lisse sur X_v ;
- (ii) il existe une courbe propre \mathcal{X} sur un ouvert non vide U de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibre générique X , telle que, pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de U , le support de la forme lisse $\mathrm{dd}^c g_v + \delta_{\mathrm{pr}_v^* D}$ soit contenu dans $S_0(\mathcal{X}_v)$ et $g_v|_{S_0(\mathcal{X}_v)} = 0$.

On notera $\omega(g)$ la collection des formes lisses $\mathrm{dd}^c g_v + \delta_{\mathrm{pr}_v^* D}$, $v \in M(\mathbb{Q})$; toutes sont de masse $\deg(D)$.

La condition (i) peut se reformuler ainsi : la fonction g_v est lisse sur $X_v - |\mathrm{pr}_v^* D|$ et, pour toute équation f du diviseur $\mathrm{pr}_v^* D$ dans un ouvert U de X_v , il existe une fonction lisse φ sur U telle que $g_v|_U = -\log |f| + \varphi$.

Remarque 4.1.1. — Une fonction de Green lisse pour le diviseur 0 est une famille $\varphi = (\varphi_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ de fonctions lisses sur X_v (condition (i)) qui, pour presque toute place v de \mathbb{Q} , sont *nulles*. La condition (ii) impose en effet l'harmonicité de φ_v sur $X_v - S_0(\mathcal{X}_v)$ et sa nullité sur $S_0(\mathcal{X}_v)$; en vertu du principe du maximum, cela implique la nullité de φ_v sur X_v puisque $S_0(\mathcal{X}_v)$ rencontre chacune des composantes connexes de X_v .

L'ensemble $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ des couples (g, D) constitués d'un diviseur D sur X et d'une fonction de Green lisse g pour D est muni d'une structure de groupe abélien en posant $(g, D) + (g', D') = (g + g', D + D')$ (l'élément neutre est le couple $(0, 0)$).

Les éléments du groupe $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ sont appelés des *diviseurs d'Arakelov lisses* (ou encore : *diviseurs d'Arakelov A^0 -réguliers*).

LEMME 4.1.2. — *L'application $\mathrm{div} : \widehat{Z}^1(X; A^0) \rightarrow \mathrm{Div}(X)$, $(g, D) \mapsto D$, est un homomorphisme de groupes s'insérant dans une suite exacte courte*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_v A^0(X_v) \longrightarrow \widehat{Z}^1(X; A^0) \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(X) \longrightarrow 0.$$

Démonstration. Soient g, g' deux fonctions de Green lisses pour un même diviseur D sur X .

En vertu du point (i) ci-dessus, la fonction continue $g'_v - g_v$ sur X_v vérifie la condition $\mathrm{dd}^c(g'_v - g_v) \in A^1(X_v)$; c'est donc une fonction lisse d'après la régularité de l'opérateur dd^c (dans le cas non archimédien, proposition 3.3.11).

La condition (ii) implique l'existence d'un ouvert non vide $U \subset \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et d'une courbe propre \mathcal{X} sur U , de fibre générique X , tels que, pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de U , la fonction continue $g'_v - g_v$ sur \mathcal{X}_v soit harmonique sur $\mathcal{X}_v - S_0(\mathcal{X}_v)$ et identiquement nulle sur $S_0(\mathcal{X}_v)$. Il en découle l'identité $g'_v - g_v = 0$ pour presque toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} , ce qui prouve que g et g' diffèrent par l'addition d'un

élément de

$$\bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} A^0(X_v).$$

Étant donné un point fermé $x \in X$ et une courbe propre \mathcal{X} au-dessus d'un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, le *potentiel d'équilibre* du diviseur effectif $\text{pr}_v^*[x]$ dans l'ouvert $X_v - S_0(\mathcal{X}_v)$ (cf. 3.6.2) est, pour toute place v de \mathbb{Q} associée à un point fermé de U , une fonction continue $g_v : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que $\text{Supp}(\text{dd}^c g_v + \delta_{\text{pr}_v^*[x]}) \subset S_0(\mathcal{X}_v)$ et qui s'annule identiquement sur $S_0(\mathcal{X}_v)$.

Considérons, pour toute autre place v de \mathbb{Q} , une forme lisse $\omega_v \in A^1(X_v)$ telle que

$$\int_{X_v} \omega_v = \deg[x]$$

et, si v est non archimédienne, $\text{Supp}(\omega_v) \subset S_0(\mathcal{X}_v)$. L'équation de courants

$$\text{dd}^c T = \omega_v - \delta_{\text{pr}_v^*[x]}$$

admet une solution continue $g_v : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, uniquement déterminée à l'addition d'une constante près.

On a ainsi construit une fonction de Green $g = (g_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ pour le diviseur $[x]$, ce qui prouve la surjectivité de l'homomorphisme $\widehat{Z}^1(X; A^0) \rightarrow \text{Div}(X)$, $(D, g) \mapsto D$. \square

Il est naturel à ce stade de poser

$$A^0(X) = \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} A^0(X_v)$$

et d'appeler *fonctions lisses* (sur X) les éléments de cet espace vectoriel réel. Introduisons également

$$A^1(X) = \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} A^1(X_v)$$

et

$$D^0(X) = \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} D^0(X_v), \quad D^1(X) = \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} D^1(X_v).$$

Un diviseur d'Arakelov $(g, D) \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ étant entièrement déterminé par la donnée de la fonction de Green g , l'application

$$\widehat{Z}^1(X; A^0) \rightarrow D^0(X), \quad (g, D) \mapsto g$$

est un isomorphisme du groupe $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ sur le sous-groupe $A^0(X)_{\log}$ des (familles de) courants $g = (g_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i') il existe un diviseur D sur X tel que, pour toute place $v \in M(\mathbb{Q})$, le courant $\text{dd}^c g_v + \delta_{\text{pr}_v^* D}$ soit une forme lisse sur X_v ;

(ii') il existe une courbe propre \mathcal{X} sur un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibre générique X , telle que, pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de U , le support de la forme lisse $\text{dd}^c g_v + \delta_{\text{pr}_v^* D}$ soit contenu dans $S_0(\mathcal{X}_v)$ et $g_v|_{S_0(\mathcal{X}_v)} = 0$.

Nous ne distinguerons pas les groupes $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ et $A^0(X)_{\log}$.

4.1.3. Produit.

L'espace vectoriel $A^0(X_\infty)$ est une \mathbb{R} -algèbre commutative pour la multiplication des fonctions et $A^1(X_\infty)$ est naturellement un module sur $A^0(X_\infty)$; il en résulte, par dualité, la définition du produit d'un courant de degré 0 (resp. 1) et d'une forme (resp. une fonction) lisse sur X_∞ , qui est un courant de degré 1 sur X_∞ .

Lorsque v est une place non archimédienne de \mathbb{Q} , l'espace vectoriel $A^0(X_v)$ n'est pas stable pour la multiplication des fonctions. L'application bilinéaire

$$A^0(X_v) \times A^1(X_v) \rightarrow A^1(X_v), \quad (\varphi, \omega) \mapsto \varphi\omega,$$

définie par $\varphi\delta_x = \varphi(x)\delta_x$ pour tous $\varphi \in A^0(X_v)$ et $x \in I(X_v)$, induit toutefois, par dualité, une application bilinéaire

$$D^0(X_v) \times A^1(X_v) \rightarrow D^1(X_v), \quad (T, \omega) \mapsto T\omega.$$

Étant donnés deux éléments g, g' de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ tels que les supports des diviseurs $\text{div}(g)$ et $\text{div}(g')$ soient disjoints, les courants de degré 1 $g_v\delta_{\text{div}(g'_v)}$ et $g'_v\delta_{\text{div}(g_v)}$ sont bien définis pour toute place v de \mathbb{Q} puisque la fonction g_v (resp. g'_v) est lisse au voisinage de $|\text{div}(g'_v)|$ (resp. $|\text{div}(g_v)|$) et on pose :

$$g_v \star g'_v = g_v\delta_{\text{div}(g'_v)} + g'_v\omega(g_v) \in D^1(X_v).$$

Nous noterons $g\delta_{\text{div}(g')}$ (resp. $g'\omega(g)$; $g \star g'$) l'élément de $D^1(X)$ dont la composante en la place v est le courant de degré 1 $g_v\delta_{\text{div}(g'_v)}$ (resp. $g'_v\omega(g_v)$; $g_v \star g'_v$) sur X_v ; ainsi :

$$g \star g' = g\delta_{\text{div}(g')} + g'\omega(g).$$

LEMME 4.1.3. — *Pour tous diviseurs d'Arakelov $g, g' \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ tels que les supports de $\text{div}(g)$ et $\text{div}(g')$ soient disjoints, les composantes des courants $g\delta_{\text{div}(g')}$ et $g'\omega(g) \in D^1(X)$ sont nulles en presque toute place $v \in M(\mathbb{Q})$.*

Démonstration. Posons $D = \text{div}(g)$, $D' = \text{div}(g')$ et soit \mathcal{X} une courbe propre au-dessus d'un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibre générique X . Pour tout point fermé x de X , l'adhérence \underline{x} de x dans \mathcal{X} est un sous-schéma fermé intègre de \mathcal{X} , fini sur U . On peut ainsi prolonger D et D' en des 1-cycles \underline{D} , \underline{D}' sur \mathcal{X} , finis sur U , et la condition $|D| \cap |D'| = \emptyset$ est vraie au-dessus d'un ouvert non vide V de U : $|\underline{D}| \cap |\underline{D}'|$ est en effet le support d'un \mathcal{O}_U -Module cohérent nul sur la fibre générique X , donc de longueur finie, et ce fermé est par conséquent contenu dans la réunion d'un nombre fini de fibres de \mathcal{X} au-dessus des points fermés de U . Pour toute place v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé $s(v)$ de V , les 0-cycles induits par \underline{D} et \underline{D}' sur la fibre $\mathcal{X}_{s(v)}$ sont donc à support disjoints.

Choissant un ouvert dense U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et une courbe \mathcal{X}/U de telle sorte que les fonctions g_v, g'_v vérifient

$$\begin{cases} \text{Supp}(\text{dd}^c g_v + \delta_{\text{pr}_v^* D}), \text{Supp}(\text{dd}^c g'_v + \delta_{\text{pr}_v^* D'}) \subset S_0(\mathcal{X}_v) \\ g_v|_{S_0(\mathcal{X}_v)} = g'_v|_{S_0(\mathcal{X}_v)} = 0, \end{cases}$$

il découle de la discussion précédente que, pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} telle que $s(v) \in V$, les ouverts $\{g_v \neq 0\}$ et $\{g'_v \neq 0\}$ sont des voisinages disjoints de $|\text{pr}_v^* D|$ et $|\text{pr}_v^* D'|$ respectivement. Le courant

$$(g\delta_{\text{div}(g')})_v = g_v\delta_{\text{div}(g'_v)} = g_v\delta_{\text{pr}_v^* D'} = \sum_{x \in |\text{pr}_v^* D'|} g_v(x)\text{ord}_x(\text{pr}_v^* D')\delta_{[x]} \in D^1(X_v)$$

est donc nul si $s(v) \in V$.

Le courant $(g'\omega(g))_v = g'_v\omega(g_v) \in D^1(X_v)$ est, quant à lui, nul pour toute place v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de U puisque g'_v s'annule sur le support de $\omega(g_v)$. \square

Le courant $g \star g' \in D^1(X_v)$ n'a qu'un nombre fini de composantes non nulles pour tous $g, g' \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ tels que $|\operatorname{div}(g)| \cap |\operatorname{div}(g')| = \emptyset$ et on pose

$$\int_X g \star g' = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} (g \star g')_v = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} g_v \star g'_v.$$

PROPOSITION 4.1.4. — *Pour tous diviseurs d'Arakelov $g, g' \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ tels que les supports de $\operatorname{div}(g)$ et $\operatorname{div}(g')$ soient disjoints,*

$$\int_X g \star g' = \int_X g' \star g.$$

Démonstration. Cette égalité est en fait valable pour chacune des places de \mathbb{Q} . Soit en effet $v \in M(\mathbb{Q})$. Les produits $g_v \operatorname{dd}^c g'_v$ et $g'_v \operatorname{dd}^c g_v$ sont bien définis dans $D^1(X_v)$ et

$$\begin{aligned} g_v \star g'_v - g'_v \star g_v &= (g_v \delta_{\operatorname{div}(g'_v)} + g'_v \omega(g_v)) - (g'_v \delta_{\operatorname{div}(g_v)} + g_v \omega(g'_v)) \\ &= g'_v \operatorname{dd}^c g_v - g_v \operatorname{dd}^c g'_v. \end{aligned}$$

La fonction g_v (resp. g'_v) est intégrable relativement à la mesure $\mu_v = \operatorname{dd}^c g'_v = \omega(g'_v) - \delta_{\operatorname{div}(g'_v)}$ (resp. $\mu_v = \operatorname{dd}^c g_v = \omega(g_v) - \delta_{\operatorname{div}(g_v)}$) : c'est trivial si la place v est non archimédienne et cela résulte, pour $v = \infty$, de l'intégrabilité locale de la fonction $\log |z|$ sur \mathbb{C} par rapport à la mesure de Lebesgue.

Il reste à considérer des suites $(g_{v,N}), (g'_{v,N})$ de fonctions lisses sur X_v qui convergent simplement vers g_v, g'_v respectivement et satisfont à la condition suivante : il existe deux suites décroissantes $(K_N), (K'_N)$ de compacts de X_v telles que

- (i) $\bigcap_N K_N = |\operatorname{div}(g_v)|$ et $\bigcap_N K'_N = |\operatorname{div}(g'_v)|$;
- (ii) pour tout N , le support de la mesure $\operatorname{dd}^c g_{v,N} - \omega(g_v)$ (resp. la mesure $\operatorname{dd}^c g'_{v,N} - \omega(g'_v)$) est contenu dans K_N (resp. K'_N).

Sous ces conditions, la continuité de g_v au voisinage du support de $\operatorname{div}(g'_v)$ implique la convergence de

$$\int_{X_v} g_v (\operatorname{dd}^c g'_{v,N} - \omega(g'_v))$$

vers

$$- \int_{X_v} g_v \delta_{\operatorname{div}(g'_v)}$$

lorsque N tend vers $+\infty$; il en découle la convergence de

$$\begin{aligned} \int_{X_v} g_v \operatorname{dd}^c g'_{v,N} &= \int_{X_v} g_v \omega(g'_v) + \int_{X_v} g_v (\operatorname{dd}^c g'_{v,N} - \omega(g'_v)) \\ &= \int_{X_v} g_v \operatorname{dd}^c g'_v + \int_{X_v} g_v \delta_{\operatorname{div}(g'_v)} + \int_{X_v} g_v (\operatorname{dd}^c g'_{v,N} - \omega(g'_v)) \end{aligned}$$

vers

$$\int_{X_v} g_v \operatorname{dd}^c g'_v.$$

La fonction g_v étant d'autre part intégrable relativement à chacune des mesures $\omega(g'_{v,N})$ - si v est la place archimédienne, cela découle de l'intégrabilité locale de $\log |z|$ sur \mathbb{C} par rapport

à la mesure de Lebesgue - la convergence simple de la suite $(g_{v,M})$ vers g_v implique

$$\int_{X_v} g_v \, dd^c g'_{v,N} = \lim_M \int_{X_v} g_{v,M} \, dd^c g'_{v,N} = \int_{X_v} g_v \, dd^c g'_v + \int_{X_v} g_v.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \int_{X_v} g_v \, dd^c &= \lim_N \lim_M \int_{X_v} g_{v,M} \, dd^c g'_{v,N} \\ &= \lim_N \lim_M \int_{X_v} g'_{v,N} \, dd^c g_{v,M} \\ &= \lim_N \int_{X_v} g'_{v,N} \, dd^c g_v \\ &= \int_{X_v} g'_v \, dd^c g_v, \end{aligned}$$

l'avant-dernière (resp. la dernière égalité) provenant de la convergence de la suite $(dd^c g_{v,M})$ vers $dd^c g_v$ dans $D^0(X_v)$ (resp. de la convergence simple de la suite $(g'_{v,N})$ vers g'_v et de l'intégrabilité de cette fonction relativement à la mesure $\omega(g_v)$).

(Dans le cas d'une place non archimédienne, les suites $(g_{v,N})$ et $(g'_{v,N})$ peuvent simplement être définies en tronquant :

$$g_{v,N} = \max(\min(g_v, N), -N) \quad \text{et} \quad g'_{v,N} = \max(\min(g'_v, N), -N).$$

□

La forme bilinéaire

$$A^0(X) \times A^0(X), \quad (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \star \psi = - \int_X \varphi \, dd^c \psi$$

sera notée $\langle \cdot, \cdot \rangle_D$.

Remarque 4.1.5. — Pour tout diviseur D sur X , l'ensemble $A^0(X_v)_D$ des fonctions de Green lisses pour D est un espace homomogène principal sous $A^0(X)$.

Remarque 4.1.6. — Voir à la fin du paragraphe 5.1 pour une comparaison avec la notion de diviseur d'Arakelov lisse et l'accouplement d'intersection construits par R. Rumely dans [28].

Étant donnés deux éléments $g, g' \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ tels que $|\operatorname{div}(g)| \cap |\operatorname{div}(g')| = \emptyset$ et des fonctions $\varphi, \varphi' \in A^0(X)$,

$$\begin{aligned} (g + \varphi) \star (g' + \varphi') &= (g + \varphi) \delta_{\operatorname{div}(g')} + (g' + \varphi')(\omega(g) + dd^c \varphi) \\ &= \left(g \delta_{\operatorname{div}(g')} + g' \omega(g) \right) + \varphi \delta_{\operatorname{div}(g')} + g' dd^c \varphi + \varphi' \omega(g) + \varphi' dd^c \varphi \\ &= g \star g' + \varphi(\omega(g') - dd^c g') + g' dd^c \varphi + \varphi' \omega(g) + \varphi' dd^c \varphi \\ &= \left(g \star g' + \varphi' \omega(g) + \varphi \omega(g') + \varphi' dd^c \varphi \right) + \left(g' dd^c \varphi - \varphi dd^c g' \right). \end{aligned}$$

Le second terme de la dernière expression disparaît par intégration sur X et nous obtenons la formule :

$$\int_X (g + \varphi) \star (g' + \varphi') = \int_X g \star g' + \int_X \varphi \omega(g') + \int_X \varphi' \omega(g) + \int_X \varphi' dd^c \varphi.$$

4.1.4. Diviseurs d'Arakelov W^1 -réguliers

La notion de diviseur d'Arakelov peut être généralisée sur le modèle de l'article [11]. Notant en effet $W^1(X)$ l'espace vectoriel réel

$$\bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} W^1(X_v),$$

les éléments du groupe abélien

$$\widehat{Z}^1(X; W^1) = \widehat{Z}^1(X; A^0) + W^1(X) \subset D^0(X),$$

seront appelés *diviseurs d'Arakelov W^1 -réguliers*. On a comme précédemment une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow W^1(X) \longrightarrow \widehat{Z}^1(X; W^1) \xrightarrow{\text{div}} \text{Div}(X) \longrightarrow 0.$$

La forme bilinéaire symétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ sur $A^0(X)$ se prolonge tautologiquement à l'espace $W^1(X)$.

Le second membre de la formule

$$\int_X (g + \varphi) \star (g' + \varphi') = \int_X g \star g' + \int_X \varphi \omega(g') + \int_X \varphi' \omega(g) - \langle \varphi, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}},$$

dans laquelle g, g' sont deux éléments de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ tels que $|\text{div}(g)| \cap |\text{div}(g')| = \emptyset$ et φ, φ' sont deux éléments de $A^0(X)$, a plus généralement un sens lorsque φ et φ' sont des éléments de l'espace vectoriel $W^1(X)$ de $D^0(X)$. C'est clair pour le terme $\langle \varphi, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}}$ et, $\omega(g), \omega(g')$ appartenant à $A^1(X)$, $T \omega(g), T \omega(g')$ sont des éléments bien définis de $\bigoplus_v D^1(X_v)$ pour tout $T \in \bigoplus_v D^0(X_v)$.

Le produit

$$(g, g') \mapsto \int_X g \star g'$$

peut ainsi être étendu au cas où g et g' sont deux éléments de $\widehat{Z}^1(X; W^1)$ tels que les supports des diviseurs $\text{div}(g)$ et $\text{div}(g')$ soient disjoints; il reste symétrique.

Remarque 4.1.7. — Considérons un élément ω de $\prod_{v \in M(\mathbb{Q})} A^1(X_v)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

- la forme lisse ω_{∞} est définie positive, de masse totale 1;
- il existe une courbe lisse \mathcal{X} sur un ouvert dense U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibre générique X , telle que, pour toute place v correspondant à un point fermé de U , ω_v soit la masse de Dirac au point de $S_0(\mathcal{X}_v)$.

Deux tels éléments ω, ω' coïncident en presque toutes les places de \mathbb{Q} .

La formule

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\omega} = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} \varphi_v \psi_v \omega_v - \int_{X_v} \varphi_v \text{dd}^c \psi_v$$

définit une forme bilinéaire symétrique, positive et non dégénérée sur l'espace vectoriel réel

$$A^0(X) = \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} A^0(X_v)$$

et l'on note $\underline{W}^1(X)_{\omega}$ l'espace de Hilbert réel le complété de $A^0(X)$ pour ce produit scalaire. Cet espace se plonge canoniquement dans $D^0(X) = \prod_v D^0(X_v)$ et son image $\underline{W}^1(X)$ ne dépend pas du choix de ω : deux formes ω, ω' comme ci-dessus définissent des normes hilbertiennes équivalentes sur $\underline{W}^1(X)$ (cf. 3.5). Il est clair que $W^1(X)$ est un sous-espace de $\underline{W}^1(X)$.

On introduit, comme précédemment, un nouveau groupe de diviseurs d'Arakelov en posant :

$$\widehat{Z}^1(X; \underline{W}^1) = \widehat{Z}^1(X; A^0) + \underline{W}^1(X).$$

Étant donnés $g \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ et $\varphi \in \underline{W}^1(X)$, le nombre réel

$$\int_{X_v} \varphi_v \omega(g_v)$$

est bien défini pour toute place v puisque $\omega(g_v)$ est une forme lisse et la famille obtenue est sommable car il existe, pour tout choix de ω du type précédent, un nombre réel strictement positif $C = C(\omega)$ tel que :

$$\sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \left| \int_{X_v} \varphi_v \omega(g_v) \right| \leq C \|\varphi\|_\omega.$$

Cette observation permet d'étendre la définition du produit d'intersection aux cas de deux diviseurs d'Arakelov $g_1, g_2 \in \widehat{Z}^1(X; \underline{W}^1)$ tels que $|\operatorname{div}(g)| \cap |\operatorname{div}(g')| = \emptyset$: si $g_1 = g_{1,0} + \varphi_1$ et $g_2 = g_{2,0} + \varphi_2$, où $g_{i,0} \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ et $\varphi_i \in \underline{W}^1(X)$,

$$\int_X g \star g' = \int_X g_{1,0} \star g_{2,0} + \int_X \varphi_1 \omega(g_{2,0}) + \int_X \varphi_2 \omega(g_{1,0}) + \int_X \varphi_1 \operatorname{dd}^c \varphi_2.$$

Ce produit est symétrique.

Étant donnés une place v de \mathbb{Q} et un diviseur D sur X_v , nous noterons $A^0(X_v)_D$ l'ensemble des fonctions continues $g : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ telles que le courant $\operatorname{dd}^c g + \delta_D$ appartienne au sous-espace $A^1(X_v)$ de $D^1(X_v)$. C'est, de manière équivalente, l'ensemble des fonctions $g : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\}$ telles que, pour toute équation f de D sur un ouvert U de X_v , la restriction de g à U soit de la forme $-\log |f| + \varphi$ avec $\varphi \in A^0(U)$.

Le produit d'intersection

$$\int_X g \star g'$$

de deux éléments de $\widehat{Z}^1(X; \underline{W}^1)$ tels que $|\operatorname{div}(g)| \cap |\operatorname{div}(g')| = \emptyset$ ne satisfait *a priori pas* à la formule

$$\int_X g \star g' = \int_X g' \delta_{\operatorname{div}(g)} + \int_X g \omega(g')$$

le définissant lorsque g, g' sont lisses. Aucun des deux termes du membre de droite n'a en général de sens lorsque g, g' sont \underline{W}^1 -réguliers. Si, toutefois, le courant g est représenté, au voisinage de $|\operatorname{div}(g')|$ par une fonction *continue*, la définition de

$$\int_X g \delta_{\operatorname{div}(g')}$$

ne pose pas de problème ; nous allons en fait voir que cette condition est suffisante pour donner un sens naturel au terme

$$\int_X g' \omega(g)$$

et prouver, non tautologiquement, la formule

$$\int_X g \star g' = \int_X g \delta_{\operatorname{div}(g')} + \int_X g' \omega(g).$$

LEMME 4.1.8. — *Considérons une place v de \mathbb{Q} et un diviseur D sur X_v .*

Soit $\mu = \omega + \mathrm{dd}^c T \in A^0(X_v) + \mathrm{dd}^c D^0(X_v)$ un courant de degré 1 sur X_v tel que le courant T de degré 0 soit représenté, au voisinage de $|D|$, par une fonction continue ψ .

Soit g une fonction dans $A^0(X_v)_D$; pour toute suite (g_N) dans $A^0(X_v)$ convergeant simplement vers g et pour laquelle il existe une suite décroissante de compacts (K_N) de limite $|D|$ telle que, pour tout N , le support du courant $\mathrm{dd}^c g_N - \omega(g)$ soit contenu dans K_N , la suite $(\langle \mu, g_N \rangle)$ est convergente et sa limite $\langle \mu, g \rangle$ satisfait à l'identité suivante :

$$\langle \omega, g \rangle + \langle T, \omega(g) \rangle = \int_{X_v} \psi \delta_D.$$

Démonstration. La convergence simple de la suite (g_N) vers g implique la convergence de la suite $(\mathrm{dd}^c g_N - \omega(g))$ vers $-\delta_D = \mathrm{dd}^c g - \omega(g)$ au sens des courants (convergence faible) ; les courants $\mathrm{dd}^c g_N - \omega(g)$ sont d'autre part (représentés par) des formes lisses et l'hypothèse sur leurs supports implique finalement la convergence de $\langle S, \mathrm{dd}^c g_N - \omega(g) \rangle$ vers $-\int_{X_v} \varphi \delta_D$ pour tout courant $S \in D^0(X)$ représenté, au voisinage de $|D|$, par une fonction continue φ . On a ainsi, en particulier,

$$\int_{X_v} \psi \delta_D = -\lim_N \langle T, \mathrm{dd}^c g_N - \omega(g) \rangle.$$

D'un autre côté, la fonction g est intégrable relativement à la mesure définie par la forme lisse ω (lorsque v est archimédien, cela découle de l'intégrabilité locale de la fonction $\log |z|$ sur \mathbb{C} par rapport à la mesure de Lebesgue) ; appliquant le théorème de convergence dominée, la convergence simple de la suite (g_N) vers g implique celle de la suite de terme général $\int_{X_v} g_N \omega$ vers $\int_{X_v} g \omega$.

Il ne reste plus qu'à écrire

$$\langle \mu, g_N \rangle = \langle \omega + \mathrm{dd}^c T, g_N \rangle = \langle \omega, g_N \rangle + \langle T, \mathrm{dd}^c g_N \rangle = \langle g_N, \omega \rangle + \langle T, \omega(g) \rangle + \int_{X_v} \psi (\mathrm{dd}^c g_N - \omega)$$

pour achever la démonstration. \square

Remarque 4.1.9. — Lorsque $\mu \in A^1(X_v) + \mathrm{dd}^c W^1(X_v)$ est, de plus, une mesure positive, le lemme précédent, appliqué aux fonctions $g^+ = \max(g, 0)$ et $g^- = \max(-g, 0)$, prouve que toutes les fonctions appartenant à $A^0(X_v)_D$ sont μ -intégrables. Cela justifie en particulier l'emploi de la notation intégrale dans ce cas :

$$\langle \mu, g \rangle = \int_{X_v} g \mu.$$

Étant donnée une fonction $g \in A^0(X_v)$, nous appellerons « troncature » toute suite (g_N) satisfaisant aux conditions énoncées au lemme précédent. La construction de troncatures est facile : dans le cas d'une place non archimédienne, il suffit de poser

$$g_N = \max(\min(g, N), -N) ;$$

lorsque v est la place archimédienne, il faut en plus effectuer une régularisation pour obtenir une fonction lisse.

Sous les hypothèses du lemme précédent, la forme linéaire

$$A^0(X_v) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_{X_v} \varphi \mu = \langle \mu, \varphi \rangle$$

est prolongée à $A^0(X_v)_D$ via la considération de troncatures ; le prolongement, noté encore

$$\int_{X_v} g\mu = \langle \mu, g \rangle,$$

vérifie l'identité

$$\int_{X_v} g\mu = \int_{X_v} g\omega + \int_{X_v} \psi\omega(g) - \int_{X_v} \psi\delta_D.$$

DÉFINITION 4.1.10. — Soient D un diviseur sur X et $\mu = \omega + \mathrm{dd}^c\psi \in \mathrm{dd}^c W^1(X)$ tel que, pour toute place v de \mathbb{Q} , le courant ψ_v soit représenté au voisinage de $|\mathrm{pr}_v^* D|$ par une fonction continue. La forme linéaire

$$A^0(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \int_X \varphi\mu = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} \varphi_v \mu_v$$

est prolongée à l'espace $W^1(X)_D = \{g \in \widehat{Z}^1(X; W^1); \mathrm{div}(g) = D\}$ en posant

$$\begin{aligned} \int_X g\mu &= \int_X (g_0 + \varphi)\mu = \int_X g_0\mu + \int_X \varphi\mu \\ &= \sum_v \int_{X_v} g_{0,v}\mu_v + \sum_v \int_{X_v} \varphi_v \mu_v, \end{aligned}$$

où $g_0 \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ et $\varphi \in W^1(X)$.

Remarque 4.1.11. — Il n'est pas clair que l'on puisse encore définir

$$\int_X g\mu$$

lorsque g est un élément de $\widehat{Z}^1(X; \underline{W}^1)$ et $\mu = \omega + \mathrm{dd}^c\psi \in A^0(X) + \mathrm{dd}^c \underline{W}^1(X)$, avec ψ_v continue au voisinage de $|\mathrm{div}(g_v)|$ pour toute place v . Cela pose en effet la question de la sommabilité de la famille des $\int_{X_v} \psi_v \delta_{\mathrm{div}(g_v)}$.

Nous pouvons maintenant démontrer la formule annoncée.

PROPOSITION 4.1.12. — Étant donnés deux diviseurs d'Arakelov $g, g' \in \widehat{Z}^1(X; W^1)$ tels que :

- les supports des diviseurs $D = \mathrm{div}(g)$ et $D' = \mathrm{div}(g')$ soient disjoints,
- pour toute place v de \mathbb{Q} , g_v soit continue au voisinage de $|\mathrm{pr}_v^* D'|$,

$$\int_X g \star g' = \int_X g \delta_{D'} + \int_X g' \omega(g).$$

Démonstration. Écrivons $g = g_0 + \varphi$, $g' = g'_0 + \varphi'$ avec $g_0, g'_0 \in A^0(X)_{\log}$, $\varphi, \varphi' \in W^1(X)$ et posons $D = \mathrm{div}(g)$, $D' = \mathrm{div}(g')$.

Modifions le membre de droite de la formule à démontrer en utilisant le lemme 4.1.8 et les notations en vigueur :

$$\begin{aligned}
\int_X g \delta_{D'} + \int_X g' \omega(g) &= \int_X g_0 \delta_{D'} + \int_X \varphi \delta_{D'} + \int_X g'_0 \omega(g) + \int_X \varphi' \omega(g) \\
&= \int_X g_0 \delta_{D'} + \int_X \varphi \delta_{D'} + \left(\int_X g'_0 \omega(g_0) + \int_X \varphi \omega(g'_0) - \int_X \varphi \delta_{D'} \right) \\
&\quad + \left(\int_X \varphi' \omega(g_0) + \int_X \varphi' dd^c \varphi \right) \\
&= \left(\int_X g_0 \delta_{D'} + \int_X g'_0 \omega(g_0) \right) + \int_X \varphi \omega(g'_0) + \int_X \varphi' \omega(g_0) \\
&\quad + \int_X \varphi dd^c \varphi' \\
&= \int_X g_0 \star g'_0 + \left(\int_X \varphi \omega(g'_0) + \int_X \varphi' \omega(g_0) + \int_X \varphi dd^c \varphi' \right) \\
&= \int_X g \star g';
\end{aligned}$$

la proposition est démontrée. \square

4.1.5. Les groupes $\widehat{\text{CH}}^1(X; A^0)$ et $\widehat{\text{CH}}^1(X; W^1)$.

Nous définissons maintenant des groupes de classes de diviseurs d'Arakelov $\widehat{\text{CH}}^1(X; A^0)$ et $\widehat{\text{CH}}^1(X; W^1)$.

PROPOSITION 4.1.13. — *Soit f une fonction méromorphe génériquement inversible sur X . L'élément*

$$\log |f| = (\log |f|_v)_v$$

de $D^0(X)$ appartient au sous-groupe $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ et, pour tout élément $g \in \widehat{Z}^1(X; W^1)$ dont le diviseur est à support disjoint de celui de f ,

$$\int_X \log |f| \star g = 0.$$

Démonstration. Il est facile de vérifier que l'élément $\log |f| = (\log |f|_v)_v$ de $D^0(X)$ est une fonction de Green lisse pour le diviseur $\text{div}(f)$:

- pour toute place v de \mathbb{Q} , la formule de Poincaré-Lelong fournit l'identité

$$dd^c \log |f|_v = \delta_{\text{pr}_v^* \text{div}(f)}$$

(proposition 3.3.15 lorsque v est une place non archimédienne), ce qui vérifie la condition (i) du début de 4.1.2 ;

- étant donnée une courbe propre et lisse \mathcal{X} sur un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ dont la fibre générique est isomorphe à X , il existe un ouvert non vide V de U tel que f se prolonge en une fonction méromorphe régulière sur la courbe \mathcal{X}_V ; l'égalité $|f|_{|S_0(\mathcal{X}_v)} = 1$ en découle pour toute place v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de V . La condition (ii) du début de 4.1.2 est vérifiée.

Puisque $\omega(\log |f|) = 0$,

$$\int_X \log |f| \star (g + \varphi) = \int_X \log |f| \star g = \int_X \log |f| \delta_{\text{div}(g)}$$

pour tous éléments g de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ et φ de $W^1(X)$, le support de $\operatorname{div}(g)$ étant disjoint de $|\operatorname{div}(f)|$.

Pour tout diviseur D sur X , l'identité

$$\int_X \log |f| \delta_D = 0$$

s'obtient à partir des égalités

$$\begin{aligned} \int_X \log |f| \delta_D &= \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} \log |f|_v \delta_{\operatorname{pr}_v^* D} \\ &= \sum_{x \in |D|} \operatorname{ord}_x(D) \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} \log |f|_v \delta_{[\operatorname{pr}_v^*(x)]} \\ &= \sum_{x \in |D|} \operatorname{ord}_x(D) \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \log |N_{\kappa(x)/\mathbb{Q}}(f(x))|_v \end{aligned}$$

en appliquant la formule du produit :

$$\sum_{v \in M(k)} \log |\alpha|_v = 0$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}^\times$. □

Remarque 4.1.14. — On démontre de la même façon la formule

$$\int_X \log |f| \star g = 0$$

pour toute fonction méromorphe génériquement inversible f sur X et tout diviseur d'Arakelov appartenant à $\widehat{Z}^1(X; \underline{W}^1)$.

Soit \mathcal{E} l'un des symboles A^0 , W^1 . Les diviseurs d'Arakelov appartenant au sous-groupe $\widehat{\operatorname{Pr}}(X)$ de $\widehat{Z}^1(X; \mathcal{E})$ engendré par l'image de l'homomorphisme

$$\Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times) \rightarrow \widehat{Z}^1(X; \mathcal{E}), \quad f \mapsto \log |f|$$

et par le groupe

$$H(X) = \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} \Gamma(X_v, \mathcal{H}_{X_v}) = \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} \mathbb{R}^{\pi_0(X_v)},$$

sont qualifiés de *principaux*. On note $\widehat{\operatorname{CH}}^1(X; \mathcal{E})$ le groupe quotient $\widehat{Z}^1(X; \mathcal{E})/\widehat{\operatorname{Pr}}(X)$. Il est clair que $\widehat{\operatorname{CH}}^1(X; A^0)$ est un sous-groupe de $\widehat{\operatorname{CH}}^1(X; W^1)$; ce dernier est le *groupe de Chow-Arakelov* de X .

L'homomorphisme $\operatorname{div} : \widehat{Z}^1(X; \mathcal{E}) \rightarrow Z^1(X)$ induit, par passage au quotient, un homomorphisme, encore noté div , du groupe $\widehat{\operatorname{CH}}^1(X; \mathcal{E})$ dans le groupe $\operatorname{CH}^1(X)$ des classes de diviseurs pour l'équivalence linéaire sur X .

Le théorème d'approximation des valuations, appliqué aux corps résiduels des points génériques de la courbe X , permet d'obtenir, pour tous diviseurs D, D' sur X , une fonction méromorphe génériquement inversible f sur X telle que les supports des diviseurs D et $D' + \operatorname{div}(f)$ soient disjoints. En vertu de la proposition précédente, nous obtenons une forme bilinéaire symétrique

$$\widehat{\operatorname{CH}}^1(X; W^1) \times \widehat{\operatorname{CH}}^1(X; W^1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x.y$$

telle que, pour tous $g, g' \in \widehat{Z}^1(X; W^1)$ dont les diviseurs ont des supports disjoints,

$$[g] \cdot [g]' = \int_X g \star g'.$$

Remarque 4.1.15. — On peut de la même façon considérer le quotient $\widehat{CH}^1(X; \underline{W}^1)$ du groupe $\widehat{Z}^1(X; \underline{W}^1)$ par le sous-groupe $\widehat{Pr}(X)$. Ce groupe contient $\widehat{CH}^1(X; W^1)$ comme sous-groupe et les remarques 4.1.7 et 4.1.14 permettent d'étendre la définition du produit d'intersection.

4.1.6. Fonctorialités.

Soient X, Y deux courbes propres et lisses sur \mathbb{Q} et $q : X \rightarrow Y$ un morphisme fini, donc plat.

Pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} , les applications \mathbb{R} -linéaires

$$q^* : A^0(Y_v) \rightarrow A^0(X_v) \quad \text{et} \quad q_* : A^1(X_v) \rightarrow A^1(Y_v),$$

respectivement définies par $q^*\varphi = \varphi \circ q$ et $q_*\delta_x = \delta_{q(x)}$ ($x \in I(X_v)$), se prolongent par dualité aux espaces de courants :

$$q^* : D^0(Y_v) \rightarrow D^0(X_v), \quad \text{et} \quad q_* : D^1(X_v) \rightarrow D^1(Y_v).$$

On a également introduit en 3.2.3 des applications linéaires

$$q_* : A^0(X_v) \rightarrow A^0(Y_v) \quad \text{et} \quad q^* : A^1(Y_v) \rightarrow A^1(X_v),$$

définies par les formules

$$(q_*\varphi)(y) = \sum_{x \in q^{-1}(y)} (\deg_x q) \varphi(x) \quad (y \in Y_v),$$

$$q^*\delta_y = \sum_{x \in q^{-1}(y)} (\deg_x q) \delta_x \quad (y \in I(Y_v))$$

et telles que, pour tous $\varphi \in A^0(X_v)$ et $\omega \in A^1(Y_v)$

$$\int_{X_v} \varphi q^*\omega = \int_{Y_v} q_*\varphi \omega.$$

Cette formule permet d'étendre, par dualité, ces applications linéaires aux espaces de courants :

$$q_* : D^0(X_v) \rightarrow D^0(Y_v) \quad \text{et} \quad q^* : D^1(Y_v) \rightarrow D^1(X_v).$$

Lorsque $\deg(q)$ est constant, l'endomorphisme q_*q^* de $D^i(Y_v)$ ($i = 0, 1$) est la multiplication par $\deg(q)$.

Les homomorphismes q_* et q^* sont compatibles avec l'opérateur dd^c : les deux diagrammes suivants d'applications linéaires

$$\begin{array}{ccc} D^0(Y_v) & \xrightarrow{dd^c} & D^1(Y_v) \\ q^* \downarrow & & \downarrow q^* \\ D^0(X_v) & \xrightarrow{dd^c} & D^1(X_v) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} D^0(X_v) & \xrightarrow{\text{dd}^c} & D^1(X_v) \\ q_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ D^0(Y_v) & \xrightarrow{\text{dd}^c} & D^1(Y_v) \end{array}$$

sont commutatifs.

Étant donnée une forme lisse positive $\omega_v \in A^1(X_v)$ dont le support rencontre chacune des composantes connexes de X_v , l'homomorphisme $q^* : A^0(Y_v) \rightarrow A^0(X_v)$ est continu lorsque ces deux espaces vectoriels sont respectivement munis des normes

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{q_*\omega_v}^2 &= \int_{Y_v} \varphi^2 q_*\omega_v - \int_{Y_v} \varphi \text{dd}^c \varphi, \quad \varphi \in A^0(Y_v) \\ \|\psi\|_{\omega_v}^2 &= \int_{X_v} \psi^2 \omega_v - \int_{X_v} \psi \text{dd}^c \psi, \quad \psi \in A^0(X_v). \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} \|q^*\varphi\|_{\omega_v}^2 &= \int_{X_v} (q^*\varphi)^2 \omega_v - \int_{X_v} q^*\varphi (\text{dd}^c q^*\varphi) = \int_{X_v} q^*(\varphi^2) \omega_v - \int_{X_v} q^*\varphi q^*\text{dd}^c \varphi \\ &= \int_{Y_v} \varphi^2 q_*\omega_v - \int_{Y_v} \varphi q_*q^*(\text{dd}^c \varphi) \\ &\leq (\deg q) \|\varphi\|_{q_*\omega_v}^2, \end{aligned}$$

où $\deg q$ est le maximum des degrés de q au-dessus des composantes connexes de Y_v . Il en découle que $q^* : D^0(Y_v) \rightarrow D^0(X_v)$ induit un homomorphisme continu de l'espace vectoriel topologique $W^1(Y_v)$ dans l'espace vectoriel topologique $W^1(X_v)$.

L'assertion analogue pour l'homomorphisme $q_* : D^0(X_v) \rightarrow D^0(Y_v)$ est vraie : le sous-espace vectoriel $W^1(X_v)$ de $D^0(X_v)$ est en effet constitué des courants T de degré 0 pour lesquels existe un réel $C = C_T > 0$ vérifiant

$$|\langle T, \text{dd}^c \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{\mathcal{D}}$$

pour toute fonction $\varphi \in A^0(X_v)$, où

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}}^2 = - \int_{X_v} \varphi \text{dd}^c \varphi$$

(et idem pour $W^1(Y_v)$). Étant donné un courant $T \in W^1(X_v)$, l'inégalité

$$\begin{aligned} |\langle q_*T, \psi \rangle| &= |\langle T, q^*\psi \rangle| \leq C \|q^*\psi\|_{\mathcal{D}} \\ &\leq C(\deg q)^{1/2} \|\psi\|_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

pour toute fonction $\psi \in A^0(Y_v)$ montre que le courant q_*T appartient au sous-espace $W^1(Y_v)$ (et implique la continuité de q_*).

Lorsque $v = \infty$ est la place archimédienne de \mathbb{Q} , q induit des applications linéaires

$$q^* : A^0(Y_\infty) \rightarrow A^0(X_\infty) \quad \text{et} \quad q^* : A^1(Y_\infty) \rightarrow A^1(X_\infty)$$

telles que $\text{dd}^c(q^*\varphi) = q^*\text{dd}^c\varphi$ pour toute fonction $\varphi \in A^0(Y_\infty)$. On en déduit, par dualité, des applications linéaires

$$\begin{aligned} q_* : D^0(X_\infty) &\rightarrow D^0(Y_\infty) \quad \text{et} \quad q_* : D^1(X_\infty) \rightarrow D^1(Y_\infty) : \\ \langle q_*T, \varphi \rangle &= \langle T, q^*\varphi \rangle \quad \text{et} \quad \langle q_*\rho, \omega \rangle = \langle \rho, q^*\omega \rangle \end{aligned}$$

avec $T \in D^0(X_\infty)$, $\varphi \in A^0(Y_\infty)$, $\rho \in D^1(X_\infty)$ et $\omega \in A^1(Y_\infty)$.

Remarque 4.1.16. — Si le courant $T \in D^0(X)$ est représenté par une fonction continue φ sur X_∞ , on vérifie que le courant q_*T est représenté par la fonction continue $q_*\varphi$ sur Y_∞ définie par la formule

$$(q_*\varphi)(y) = \sum_{x \in q^{-1}(y)} (\deg_x q) \varphi(x).$$

En particulier, lorsque $\deg(q)$ est constant : $q_*q^*\varphi = (\deg q)\varphi$ ($\varphi \in C^0(Y_\infty)$).

Quelle que soit la forme volume lisse et positive ω sur Y_∞ , $\mu = q^*\omega$ est une forme volume lisse et positive sur X_∞ et le courant $q_*\mu \in D^1(Y_\infty)$ est représenté par un multiple de ω sur chaque composante connexe de Y_∞ . On vérifie comme précédemment que l'application linéaire q^* de $A^0(Y_\infty)$ dans $A^0(X_\infty)$ est continue lorsque ces espaces vectoriels sont munis des normes associées aux formes quadratiques

$$\|\varphi\|_{q_*\mu} = \int_{Y_\infty} \varphi^2 q_*\mu - \int_{Y_\infty} \varphi \, dd^c \varphi \quad \text{et} \quad \|\psi\|_\mu^2 = \int_{X_\infty} \psi^2 \mu - \int_{X_\infty} \psi \, dd^c \psi$$

($\varphi \in A^0(Y_\infty)$, $\psi \in A^0(X_\infty)$). L'application q^* se prolonge donc en une application linéaire continue de l'espace vectoriel topologique $W^1(Y_\infty)$ dans l'espace vectoriel topologique $W^1(X_\infty)$.

Le raisonnement tenu plus haut dans le cas d'une place non archimédienne se transcrit tel quel et permet d'établir qu'il existe une unique application linéaire continue $q_* : W^1(X_\infty) \rightarrow W^1(Y_\infty)$ s'insérant dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W^1(X_\infty) & \longrightarrow & D^0(X_\infty) \\ q_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ W^1(Y_\infty) & \longrightarrow & D^0(Y_\infty) \end{array}$$

dans la catégorie des espaces vectoriels topologiques, où les flèches horizontales sont les immersions canoniques.

Quels que soient le diviseur D sur Y et la fonction de Green lisse g pour D , $q^*g = (q^*g_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ est une fonction de Green lisse pour le diviseur p^*D sur X . En effet :

- pour toute place v de \mathbb{Q} , la fonction q^*g_v est lisse en dehors du support de $\text{pr}_v^*q^*D$ et, étant donnée une équation f de pr_v^*D sur un ouvert U de Y_v , q^*f est une équation de $\text{pr}_v^*q^*D$ sur l'ouvert $q^{-1}(U)$ de X_v telle que

$$q^*g_v - q^*f = q^*(g_v - f) \in q^*A^0(U) \subset A^0(q^{-1}(U));$$

- étant données des courbes propres \mathcal{X} et \mathcal{Y} au-dessus d'un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibres génériques X et Y respectivement, il existe un ouvert non vide $V \subset U$ tel que le morphisme fini $q : Y \rightarrow X$ se prolonge en un morphisme fini $q : \mathcal{X}|_V \rightarrow \mathcal{Y}|_V$. On a en particulier $S_0(\mathcal{X}_v) = q^{-1}S_0(\mathcal{Y}_v)$ pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé $s(v)$ de V puisque q envoie chaque composante irréductible de la fibre $\mathcal{X}_{s(v)}$ sur une composante irréductible de la fibre $\mathcal{Y}_{s(v)}$. Par suite, si

$$\begin{cases} \text{Supp}(dd^c g_v + \delta_{q^*D}) \subset S_0(\mathcal{Y}_v) \\ g_v S_0(\mathcal{Y}_v) = 0, \end{cases}$$

la fonction q^*g_v vérifie les conditions analogues relativement à $S_0(\mathcal{X}_v)$.

La vérification de l'égalité $\omega(q^*g) = q^*\omega(g)$ (dans $\prod_v A^1(X_v)$) est immédiate.

On obtient ainsi un homomorphisme de groupes abéliens

$$p^* : \widehat{Z}^1(Y; W^1) \rightarrow \widehat{Z}^1(X; W^1)$$

s'insérant dans le diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W^1(Y) & \longrightarrow & \widehat{Z}^1(Y; W^1) & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(Y) \longrightarrow 0 \\ & & p^* \downarrow & & p^* \downarrow & & \downarrow p^* \\ 0 & \longrightarrow & W^1(X) & \longrightarrow & \widehat{Z}^1(X; W^1) & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(X) \longrightarrow 0 \end{array}$$

et envoyant le sous-groupe $\widehat{Z}^1(Y; A^0)$ dans $\widehat{Z}^1(X; A^0)$.

Il existe un ouvert non vide $U \subset \text{Spec}(\mathbb{Z})$ et des courbes propres et *lisses* \mathcal{X}, \mathcal{Y} sur U , de fibres génériques respectives X, Y , telles que le morphisme q se prolonge en un morphisme fini et plat $q : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Dans ces conditions, tout diviseur D sur X se prolonge canoniquement en un diviseur (Cartier) sur \mathcal{X} , fini et plat sur U , et l'homomorphisme *norme* $N_{\mathcal{X}/\mathcal{Y}} : q_*\mathcal{O}_{\mathcal{X}}^\times \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{Y}}^\times$ permet de définir l'*image directe* $q_*D \in \text{Div}(Y)$ du diviseur D . Au niveau des 0-cycles associés, c'est l'image directe usuelle q_* .

Finalement : étant donnés un diviseur D sur X et une fonction de Green lisse g pour D , le courant $q_*g = (q_*g_v)_v \in D^1(Y)$ appartient au sous-groupe $\widehat{Z}^1(Y; W^1)$ et est tel que $\text{div}(q_*g) = q_*D$. On obtient ainsi un homomorphisme de groupes abéliens

$$q_* : \widehat{Z}^1(X; A^0) \rightarrow \widehat{Z}^1(Y; W^1)$$

se prolongeant naturellement en un homomorphisme

$$q_* : \widehat{Z}^1(X; W^1) \rightarrow \widehat{Z}^1(Y; W^1)$$

et s'insérant dans un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & W^1(X) & \longrightarrow & \widehat{Z}^1(X; W^1) & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(X) \longrightarrow 0 \\ & & q_* \downarrow & & q_* \downarrow & & \downarrow q_* \\ 0 & \longrightarrow & W^1(Y) & \longrightarrow & \widehat{Z}^1(Y; W^1) & \xrightarrow{\text{div}} & \text{Div}(Y) \longrightarrow 0. \end{array}$$

On vérifie immédiatement les identités

$$\omega(q^*g') = q^*\omega(g'), \quad \omega(q_*g) = q_*\omega(g)$$

pour tous $g \in \widehat{Z}^1(X; W^1)$, $g' \in \widehat{Z}^1(Y; W^1)$.

Les homomorphismes q_* et q^* préservent les sous-groupes $\widehat{\text{Pr}}(X), \widehat{\text{Pr}}(Y)$ et sont compatibles à la formation des groupes de Chow-Arakelov, induisant donc des homomorphismes

$$q^* : \widehat{\text{CH}}^1(Y; W^1) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1) \quad \text{et} \quad q_* : \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^1(Y; W^1).$$

Remarque 4.1.17. — L'homomorphisme

$$q_* : D^0(X) \rightarrow D^0(Y)$$

applique également le sous-espace $\underline{W}^1(X)$ dans le sous-espace $\underline{W}^1(Y)$ et l'homomorphisme

$$q^* : A^0(Y) \rightarrow A^0(X)$$

se prolonge par continuité en un homomorphisme de $\underline{W}^1(Y)$ dans $\underline{W}^1(X)$.

On en déduit l'existence des deux homomorphismes

$$q_* : \widehat{CH}^1(X) \rightarrow \widehat{CH}^1(Y)$$

et

$$q^* : \widehat{CH}^1(Y) \rightarrow \widehat{CH}^1(X).$$

PROPOSITION 4.1.18. — (Formule de projection)

Pour tous diviseurs d'Arakelov $x \in \widehat{CH}^1(X; \mathbb{W}^1)$, $y \in \widehat{CH}^1(Y; \mathbb{W}^1)$,

$$q^*y \cdot x = y \cdot q_*x.$$

Démonstration. Soient $g \in \widehat{Z}^1(X; \mathbb{W}^1)$ et $g' \in \widehat{Z}^1(Y; \mathbb{W}^1)$ deux diviseurs d'Arakelov représentant respectivement x et y et tels que les supports des diviseurs $p_*\text{div}(g)$ et $\text{div}(g')$ sur Y soient disjoints.

Écrivons $g = g_0 + \varphi$ et $g' = g'_0 + \varphi'$, avec g_0, g'_0 des diviseurs d'Arakelov lisses, $\varphi \in \mathbb{W}^1(X)$ et $g' \in \mathbb{W}^1(Y)$. Les identités

$$\begin{aligned} \int_X q^*g' \star g &= \int_X q^*g'_0 \star g_0 + \int_X q^*\varphi' \omega(g_0) + \int_X \varphi \omega(q^*g'_0) + \int_X q^*\varphi' \text{dd}^c\varphi \\ &= \int_X q^*g'_0 \star g_0 + \int_Y \varphi' q_*\omega(g_0) + \int_X \varphi q^*\omega(g'_0) + \int_Y \varphi' q_*\text{dd}^c\varphi \\ &= \int_X q^*g'_0 \star g_0 + \int_Y \varphi' \omega(q_*g_0) + \int_X q_*\varphi \omega(g'_0) + \int_Y \varphi' \text{dd}^c q_*\varphi \end{aligned}$$

et

$$\int_Y g' \star q_*g = \int_Y g'_0 \star q_*g_0 + \int_Y \varphi \omega(q_*g_0) + \int_Y q_*\varphi \omega(g'_0) + \int_Y \varphi' \text{dd}^c q_*\varphi$$

ramènent la démonstration de la formule au cas de deux diviseurs d'Arakelov lisses.

Lorsque $g \in \widehat{Z}^1(X; \mathbb{A}^0)$ et $g' \in \widehat{Z}^1(Y; \mathbb{A}^0)$, la conclusion découle directement de la proposition 4.1.12 : q_*g_0 est en effet un diviseur d'Arakelov dans $\widehat{Z}^1(Y; \mathbb{W}^1)$ continu au voisinage du support de $\text{div}(g')$, de sorte que

$$\int_Y g' \star q_*g = \int_Y q_*g \delta_{\text{div}(g')} + \int_Y g' \omega(q_*g),$$

et alors

$$\begin{aligned} \int_Y g' \star q_*g &= \int_X g q^*\delta_{\text{div}(g')} + \int_Y g' q_*\omega(g) = \int_X g \delta_{q^*\text{div}(g')} + \int_X q^*g' \omega(g) \\ &= \int_X g \delta_{\text{div}(q^*g')} + \int_X q^*g' \omega(g) = \int_X q^*g' \star g. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.1.19. — La même démonstration permet d'établir la formule de projection pour des classes $x \in \widehat{CH}^1(X; \underline{\mathbb{W}}^1)$ et $y \in \widehat{CH}^1(Y; \underline{\mathbb{W}}^1)$.

4.1.7. Produit d'intersection sur $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbb{W}^1)$.

Soient v une place de \mathbb{Q} et D un diviseur de degré 0 sur chaque composante connexe de X_v . Les courants solutions de l'équation

$$\text{dd}^c g = -\delta_D$$

appartiennent à $A^0(X_v)_D$ et forment un espace principal homogène sous l'espace vectoriel $\Gamma(X, \mathcal{H}_{X_v})$ des fonctions (réelles) localement constantes sur X_v . Lorsque D et D' sont deux diviseurs de degré 0 sur chaque composante connexe de X_v dont les supports sont disjoints, le réel

$$\langle D, D' \rangle_{\mathcal{N}} = \int_{X_v} g \star g'$$

ne dépend pas du choix des éléments g, g' de $A^0(X_v)_{\log}$ tels que $\text{dd}^c g = -\delta_D$ et $\text{dd}^c g' = -\delta_{D'}$ respectivement.

Il est clair que $\langle D, D' \rangle_{\mathcal{N}} = 0$ si les supports de D et D' sont contenus dans des composantes connexes distinctes de X_v .

THÉORÈME 4.1.20. — *Soit $\mathcal{N}(X_v)$ l'ensemble des couples de diviseurs de degré nul sur chaque composante connexe de X_v dont les supports sont disjoints. L'application*

$$\mathcal{N}(X_v) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (D, D') \mapsto \langle D, D' \rangle_{\mathcal{N}}$$

coïncide avec l'accouplement de Néron sur chacune des composantes connexes de X_v .

Rappel : l'accouplement de Néron, version locale. Soient K un corps muni d'une valeur absolue $|\cdot|$ et C une courbe régulière, irréductible et propre sur K . Dans l'article [24], Néron construit une application

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{N}(C) \rightarrow \mathbb{R}$$

entièrement caractérisée par les conditions suivantes :

- bilinéarité ;
- symétrie ;
- pour toute fonction rationnelle non nulle f sur C et tout diviseur D de degré 0 sur C dont le support est disjoint de $|\text{div}(f)|$,

$$\langle \text{div}(f), D \rangle = -\log |f|(D) = -\sum_{x \in C} \text{ord}_x(D) [\kappa(x) : k] \log |f|(x) ;$$

- pour tout diviseur D de degré 0 sur C et tout point fermé $x_0 \in C \setminus |D|$, l'application

$$\{\text{points fermés de } C \setminus |D|\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{[\kappa(x) : k]} \langle D, [\kappa(x_0) : k][x] - [\kappa(x) : k][x_0] \rangle$$

est localement bornée.

Démonstration du théorème. On peut supposer que X_v est connexe.

La bilinéarité et la symétrie de l'accouplement $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}}$ sont immédiates.

Soient f une fonction méromorphe génériquement inversible sur X_v , D un diviseur de degré 0 sur X_v dont le support est disjoint de $|\text{div}(f)|$ et g une solution de l'équation $\text{dd}^c g = -\delta_D$. La fonction $\log |f|$ satisfaisant à l'équation de Poincaré-Lelong

$$\text{dd}^c (-\log |f|) = -\delta_{\text{div}(f)},$$

$$\langle \text{div}(f), D \rangle_{\mathcal{N}} = -\int_{X_v} \log |f| \delta_D = -\log |f|(D).$$

Rappelons enfin que l'on note $(X_v)_0$ l'ensemble des points x de X_v tels que $[\kappa(x) : \mathbb{Q}_v] < \infty$; étant donné un diviseur D sur X_v de degré 0 et un point $x_0 \in (X_v)_0 \setminus |D|$, soit g une solution

de l'équation $\mathrm{dd}^c g = -\delta_D$. Ce courant étant représenté par une fonction continue – donc localement bornée – sur $X_v - |D|$, la fonction

$$(X_v)_0 - |D| \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{[\kappa(x) : k]} \langle D, [\kappa(x_0) : k][x] - [\kappa(x) : k][x_0] \rangle = [\kappa(x_0) : k](g(x) - g(x_0))$$

est localement bornée. \square

Passons à la situation globale. Soit \mathcal{X} une courbe propre et lisse sur un ouvert non vide U de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ dont la fibre générique est isomorphe à X . Étant donné un diviseur D de degré 0 sur chacune des composantes connexes de X , il existe, pour toute place v de \mathbb{Q} associée à un point fermé de U , un unique élément g_v de $A^0(X_v)_{\log}$ tel que

$$\begin{cases} \mathrm{dd}^c g_v = -\delta_{\mathrm{pr}_v^* D} \\ g_v|_{S_0(\mathcal{X}_v)} = 0. \end{cases}$$

Choisissant, pour les autres places v de \mathbb{Q} , une solution g_v dans $A^0(X_v)_{\log}$ de l'équation $\mathrm{dd}^c g_v = -\delta_{\mathrm{pr}_v^* D}$, nous obtenons un diviseur d'Arakelov lisse $(D, g) \in \widehat{Z}^1(X; A^0)$ dont la classe dans $\widehat{CH}^1(X; A^0)$ ne dépend que de D . En effet : modifier la courbe lisse \mathcal{X}/U et les autres fonctions g_v a pour effet d'ajouter à g un élément φ de $A^0(X)$ tel, pour toute place v de \mathbb{Q} , $\mathrm{dd}^c \varphi_v = 0$. Cette fonction lisse φ appartient ainsi au sous-espace $H(X)$ de $A^0(X)$ et les éléments $g, g + \varphi$ de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ définissent bien la même classe dans $\widehat{CH}^1(X; A^0)$.

On vient de construire une *section* canonique σ de l'épimorphisme

$$\mathrm{div} : \widehat{CH}^1(X; A^0) \rightarrow CH^1(X)$$

au-dessus du sous-groupe $CH^1(X)_0$ des classes de diviseurs homologiquement triviaux sur X .

PROPOSITION 4.1.21. — *L'application*

$$CH^1(X)_0 \times CH^1(X)_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad ([D], [D']) \mapsto \sigma([D]).\sigma([D'])$$

coïncide avec l'accouplement de Néron.

Démonstration. L'accouplement de Néron global $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}}$ sur le groupe $\mathrm{Div}(X)_0$ des diviseurs homologiquement triviaux est caractérisé par les trois conditions suivantes :

- bilinéarité ;
- $\langle \mathrm{div}(f), D \rangle_{\mathcal{N}} = 0$ pour tous $D \in \mathrm{Div}(X)_0$, $f \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X^\times)$;
- si $D, D' \in \mathrm{Div}(X)_0$ ont des supports disjoints,

$$\langle D, D' \rangle_{\mathcal{N}} = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \langle \mathrm{pr}_v^* D, \mathrm{pr}_v^* D' \rangle_{\mathcal{N}, v},$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{N}, v}$ désignant l'accouplement de Néron local.

L'accouplement

$$\mathrm{Div}(X)_0 \times \mathrm{Div}(X)_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (D, D') \mapsto \sigma([D]).\sigma([D'])$$

satisfait aux deux premières conditions et, si D, D' ont des supports disjoints,

$$\sigma([D]).\sigma([D']) = \int_X g \star g' = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} g_v \star g'_v,$$

g (resp. g') étant un élément de $\widehat{Z}^1(X; A^0)$ tel que $\mathrm{div}(g) = D$ et $\omega(g) = 0$ (resp. $\mathrm{div}(g') = D'$ et $\omega(g') = 0$). La conclusion découle alors du théorème précédent. \square

COROLLAIRE 4.1.22. — Supposons X connexe, de genre au moins 1, et soit $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)'$ le quotient du groupe abélien $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)$ par son sous-groupe de torsion.
L'accouplement

$$\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1) \times \widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x.y$$

induit une forme bilinéaire non dégénérée sur $\text{CH}^1(X; \mathbf{W}^1)'$, de signature $(+, -, -, \dots)$.

Démonstration. La forme bilinéaire induite sur le sous-groupe $\mathbf{W}^1(X)/\text{H}(X)$ est définie négative : en effet, pour tous $\varphi, \psi \in \mathbf{W}^1(X) = \bigoplus_{v \in \text{M}(k)} \mathbf{W}^1(X_v)$,

$$[\varphi].[\psi] = - \sum_{v \in \text{M}(\mathbb{Q})} \langle \varphi_v, \psi_v \rangle_{\mathcal{D}}$$

et, pour toute place $v \in \text{M}(\mathbb{Q})$, la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$ est positive sur $\mathbf{W}^1(X_v)$, de noyau le sous-espace $\Gamma(X_v, \mathcal{H}_{X_v})$. La forme bilinéaire que l'on considère sur $\mathbf{W}^1(X)$ est donc négative, de noyau le sous-espace

$$\text{H}(X) = \bigoplus_{v \in \text{M}(\mathbb{Q})} \Gamma(X_v, \mathcal{H}_{X_v}).$$

La forme bilinéaire induite sur le sous-espace $\sigma(\text{CH}^1(X)_0')$ de $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)'$ est également négative : elle s'identifie en effet à l'accouplement de Néron, lequel est *négatif*, de noyau le sous-groupe de torsion de $\text{CH}^1(X)_0$.

Les sous-espaces $\mathbf{W}^1(X)/\text{H}(X)$ et $\sigma(\text{CH}^1(X)_0)$ de $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)$ sont orthogonaux relativement à cette forme bilinéaire : puisque $\omega(g) = 0$ pour tout élément g de $\widehat{\mathbf{Z}}^1(X; \mathbf{A}^0)$ représentant un élément de $\sigma(\text{CH}^1(X)_0)$,

$$[g].[\varphi] = \int_X \varphi \star g = \int_X \varphi \omega(g) = 0$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathbf{W}^1(X)$.

La forme bilinéaire

$$\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1) \times \widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x.y$$

est donc négative sur le sous-groupe

$$\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)_0 = \mathbf{W}^1(X)/\text{H}(X) + \sigma(\text{CH}^1(X)_0)$$

de $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)$, noyau de l'homomorphisme

$$\deg : \widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)' \rightarrow \mathbb{Z}, \quad g \mapsto \deg(\text{div}(g)).$$

La forme bilinéaire induite sur $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)'$ est non-dégénérée : étant donné $g \in \widehat{\mathbf{Z}}^1(X; \mathbf{W}^1)$ tel que $[g].x = 0$ pour tout $x \in \widehat{\text{CH}}^1(X; \mathbf{W}^1)$, observons tout d'abord que $\omega(g) = 0$ car, quelle que soit la fonction $\varphi \in \mathbf{A}^0(X)$,

$$\int_X \varphi \omega(g) = [g].[\varphi] = 0 ;$$

g appartient ainsi au sous-espace $\sigma(\text{CH}^1(X)_0)$ et donc $[g]$ est un élément de torsion.

Il reste à vérifier qu'il existe $x \in \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1)$ tel que $x^2 > 0$. Considérons pour cela un morphisme fini et plat $p : X \rightarrow \mathbb{P}^1$. La formule de projection

$$p^*x.y = x.p_*y,$$

$x \in \widehat{\text{CH}}^1(\mathbb{P}^1; W^1)$, $y \in \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1)$ (proposition 4.1.10), jointe à la relation $p_*p^* = (\deg p)\text{id}$, implique l'identité

$$p^*x.p^*x = (\deg p)(x.x)$$

pour tout $x \in \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1)$. Il suffit ainsi d'exhiber un élément de carré strictement positif dans $\widehat{\text{CH}}^1(\mathbb{P}^1; W^1)$. La classe de l'élément g de $\widehat{Z}^1(\mathbb{P}^1, A^0)$ défini par

$$g_v = \begin{cases} \frac{1}{2} \log(1 + |T_1|^2) & \text{si } v = \infty, \\ \max(\log |T_1|_v, 0) & \text{si } v \text{ est non archimédienne} \end{cases}$$

convient :

$$\begin{aligned} [g]^2 &= \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1} g \star (g - \log |T_1|) \\ &= \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}, \infty}^1} g_{\infty} \star (g_{\infty} - \log |T_1|) \\ &= g_{\infty}(0) + \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}, \infty}^1} (g_{\infty} - \log |T_1|) \omega(g_{\infty}) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{C}} \log(1 + |z|^{-2})(1 + |z|^2)^{-2} \frac{i}{2\pi} (dz \wedge d\bar{z}) \\ &= \int_0^{+\infty} \log(1 + r^{-2})(1 + r^2)^{-2} r \, dr = \frac{1}{2} > 0. \end{aligned}$$

□

Le corollaire précédent est une généralisation du théorème de l'indice de Hodge de Faltings/Hriljac et du théorème 5.5 de [11].

4.2. Faisceaux inversibles métrisés

4.2.1. Situation locale.

Soient v une place de \mathbb{Q} et L un faisceau inversible sur X_v . Une métrique *lisse* (resp. continue) sur L est la donnée, pour tout ouvert U de X_v et toute section inversible s de L sur U , d'une fonction lisse (resp. continue) $-\log ||s|| \in A^0(U)$, la condition de compatibilité suivante étant vérifiée :

$$\begin{aligned} &\text{pour toutes sections inversibles } s, s' \text{ de } L \text{ sur des ouverts } U, U' \text{ de } X_v, s'_{|U \cap U'} = \\ &fs_{|U \cap U'} \text{ avec } f \in \Gamma(U \cap U', \mathcal{O}_{X_v}^{\times}) \text{ et} \\ &-\log ||s'||_{|U \cap U'} = -\log ||s||_{|U \cap U'} - \log |f|_v. \end{aligned}$$

Nous parlerons parfois d'une métrique A^0 -régulière (resp. C^0 -régulière) en lieu et place d'une métrique lisse (resp. continue).

Remarque 4.2.1. — Lorsque v est une place non archimédienne, le faisceau $\mathcal{A}_{X_v}^0$ des germes de fonctions lisses sur X_v provient d'un faisceau sur le G -site $(X_v)_G$ (3.2.1). Puisqu'un \mathcal{O}_{X_v} -Module inversible L provient également d'un Module inversible sur le site annelé $(X_v)_G$, on peut munir L d'une métrique lisse $||.||$ en se donnant un recouvrement localement fini \mathcal{V} de

X_v par des domaines k -affinoïdes et une fonction $-\log \|s_V\| \in A^0(V)$ pour toute section inversible s_V de L sur $V \in \mathcal{V}$, la condition de cocycle évidente étant vérifiée.

De manière équivalente, une métrique lisse (resp. continue) sur L est la donnée, pour toute section méromorphe génériquement inversible s de L , d'un élément $-\log \|s\|$ du groupe $A^0(X_v)_{\text{div}(s)}$ (resp. $C^0(X_v)_{\text{div}(s)}$), la condition de compatibilité suivante étant vérifiée :

étant données deux sections méromorphes génériquement inversibles s, s' de L , $s' = fs$ avec f une fonction méromorphe génériquement inversible sur X et

$$-\log \|s'\| = -\log \|s\| - \log |f|_v.$$

Cette formulation permet de définir une notion de métrique W^1 -régulière sur un faisceau inversible L : c'est la donnée, pour toute section méromorphe génériquement inversible s de L , d'un élément $-\log \|s\|$ de $W^1(X_v)_{\text{div}(s)}$, la condition de compatibilité ci-dessus étant vérifiée.

Le *produit* de deux faisceaux inversibles métrisés $(L, \|\cdot\|)$ et $(L', \|\cdot\|')$ sur X_v est le faisceau inversible métrisé $(L \otimes L', \|\cdot\|'')$ tel que, pour toutes sections méromorphes génériquement inversibles s et s' de L et L' respectivement,

$$-\log \|s \otimes s'\|'' = -\log \|s\| - \log \|s'\|.$$

L'*inverse* d'un faisceau inversible métrisé $(L, \|\cdot\|)$ sur X_v est le faisceau inversible métrisé $(L^{\otimes(-1)}, \|\cdot\|')$ tel que, pour toute section méromorphe génériquement inversible s de L ,

$$-\log \|s^{\otimes(-1)}\|' = \log \|s\|.$$

Ces définitions font de l'ensemble des classes d'isométrie de faisceaux inversibles munis de métriques \mathcal{E} -régulières ($\mathcal{E} \in \{A^0, C^0, W^1\}$) un groupe abélien, noté $\text{Pic}(X; \mathcal{E})$, qui s'insère dans une suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \Gamma(X_v, \mathcal{O}_{X_v}^\times)^{(1)} \longrightarrow \Gamma(X_v, \mathcal{O}_{X_v}^\times) \longrightarrow \mathcal{E}(X_v) \longrightarrow \text{Pic}(X_v; \mathcal{E}) \longrightarrow \text{Pic}(X_v) \longrightarrow 0$$

où $\Gamma(X_v, \mathcal{O}_{X_v}^\times)^{(1)}$ est le groupe des sections globales de \mathcal{O}_{X_v} de valeur absolue 1.

Remarque 4.2.2

1. L'espace vectoriel $\mathcal{E}(X_v)$ s'identifie canoniquement au groupe des métriques \mathcal{E} -régulières sur le faisceau structural \mathcal{O}_{X_v} .
2. La surjectivité de l'homomorphisme $\text{Pic}(X_v; \mathcal{E}) \rightarrow \text{Pic}(X_v)$ d'oubli de la métrique équivaut à la non vacuité de $\mathcal{E}(X_v)_{\log}$.

PROPOSITION 4.2.3. — *Le faisceau inversible L étant muni d'une métrique \mathcal{E} -régulière, le courant*

$$\text{dd}^c(-\log \|s\|) + \delta_{\text{div}(s)} \in A^1(X_v) + \text{dd}^c \mathcal{E}(X_v) \subset D^1(X_v)$$

est indépendant du choix de la section méromorphe génériquement inversible s de L .

Démonstration. L'égalité

$$\begin{aligned} \text{dd}^c(-\log \|fs\|) + \delta_{\text{div}(fs)} &= (\text{dd}^c(-\log \|s\|) + \delta_{\text{div}(s)}) + (\text{dd}^c(-\log |f|_v) + \delta_{\text{div}(f)}) \\ &= \text{dd}^c(-\log \|s\|) + \delta_{\text{div}(s)} \end{aligned}$$

pour toutes sections méromorphes inversibles s et f de L et \mathcal{O}_{X_v} respectivement se déduit immédiatement de la formule de Poincaré-Lelong (proposition 3.3.15 lorsque v n'est pas archimédienne).

Étant donnée d'autre part une métrique lisse $\|\cdot\|_0$ sur L , la fonction

$$\varphi = -\log \|s\| + \log \|s\|_0$$

ne dépend pas du choix de la section méromorphe génériquement inversible s de L et appartient à l'espace $\mathcal{E}(X_v)$; on a alors

$$\mathrm{dd}^c(-\log \|s\|) + \delta_{\mathrm{div}(s)} = (\mathrm{dd}^c(-\log \|s\|_0) + \delta_{\mathrm{div}(s)}) + \mathrm{dd}^c\varphi \in A^1(X_v) + \mathrm{dd}^c\mathcal{E}(X_v).$$

□

Ce courant est appelé le *courant de courbure* du faisceau inversible métrisé $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$; il se note $c_1(\overline{L})$ et satisfait à la condition

$$\int_{X_v} c_1(\overline{L}) = \deg(L).$$

C'est une forme lisse – c'est-à-dire un élément de $A^1(X_v)$ – si (et seulement si) la métrique est lisse.

Soient v une place non archimédienne de \mathbb{Q} et L un faisceau inversible sur X_v . Pour toute $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -courbe formelle propre \mathcal{X} de fibre générique X_v , la donnée d'un faisceau inversible \mathcal{L} sur \mathcal{X} prolongeant L permet de munir celui-ci d'une métrique lisse.

LEMME 4.2.4. — *Il existe une métrique lisse $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ et une seule sur L telle que, pour tout ouvert U de \mathcal{X} et toute section inversible ε_U de $\mathcal{L}|_U$,*

$$-\log \|\varepsilon_U \otimes 1\|_{\mathcal{L}} = 0$$

($\varepsilon_U \otimes 1$ est la section de L sur $(\mathcal{X}|_U)_{\eta}$ induite par ε_U).

Démonstration. Quel que soit l'ouvert U de \mathcal{X} , les éléments f de $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\times})$ satisfont à la condition $|f|_v \equiv 1$ sur le domaine \mathbb{Q}_v -analytique U_{η} de $X_v = \mathcal{X}_{\eta}$.

Soit \mathcal{U} un recouvrement fini de \mathcal{X} par des ouverts affines U sur lesquels \mathcal{L} admet une section inversible ε_U . Il existe, en vertu de l'observation précédente et de la remarque 4.2.1, une métrique lisse et une seule $\|\cdot\|_{\mathcal{L}} = \|\cdot\|$ sur L telle que $\log \|\varepsilon_U \otimes 1\| = 0$ pour tout $U \in \mathcal{U}$. Quels que soient alors l'ouvert Ω de \mathcal{X} et la section inversible s de \mathcal{L} sur Ω , $s|_U = f_U \varepsilon_U|_{U \cap \Omega}$ avec $f_U \in \Gamma(U \cap \Omega, \mathcal{O}_{\mathcal{X}}^{\times})$ et, posant $V = U \cap \Omega$,

$$-\log \|s \otimes 1\|_{V_{\eta}} = -\log \|s|_V \otimes 1\| = -\log \|\varepsilon_U|_V \otimes 1\| - \log |f_U| = -\log \|\varepsilon_U \otimes 1\|_{V_{\eta}} = 0.$$

□

LEMME 4.2.5. — *Soiet \mathcal{X} une $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -courbe normale de fibre générique X_v , \mathcal{L} un faisceau inversible sur \mathcal{X} et $L = \mathcal{L}_{\eta}$. La courbure de la métrique $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$ sur L est la forme lisse*

$$\sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} e(\xi) \deg(c_1(\mathcal{L}) \cap [r_v(\xi)]) \delta_{\xi},$$

où $e(\xi)$ est la multiplicité de la composante irréductible de $\mathcal{X}_{s(v)}$ de point générique $r(\xi)$ et r_v est l'application de réduction $X_v \rightarrow \mathcal{X}_{s(v)}$.

Démonstration. Soit s une section méromorphe régulière du faisceau inversible L .

Le support de la forme de courbure $c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$ est clairement contenu dans $S_0(\mathcal{X})$: étant en effet donnée une section inversible ε de \mathcal{L} sur un ouvert affine U de $\mathcal{X}_{s(v)}$,

$$\Omega = r_v^{-1}(U) - S_0(\mathcal{X}|_U) = r_v^{-1}(U) \cap (X_v - S_0(\mathcal{X}))$$

est un ouvert de X_v sur lequel $-\log \|s\|_{\mathcal{L}} = -\log |s \otimes \varepsilon^{-1}|$ et

$$c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})|_{\Omega} = (\mathrm{dd}^c(-\log \|s\|) + \delta_{\mathrm{div}(s)})|_{\Omega} = 0$$

par application de la formule de Poincaré-Lelong (proposition 3.3.15). Puisque Ω est la réunion des fibres de r_v au-dessus des points fermés de U , ceci prouve que le support de $c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}})$

est contenu dans l'image réciproque $S_0(\mathcal{X})$ de l'ensemble des points génériques de $\mathcal{X}_{s(v)}$. Il reste à établir la formule

$$\int_{\{\xi\}} c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) = e(\xi) \deg(c_1(\mathcal{L}) \cap [r_v(\xi)])$$

pour tout point ξ de $S_0(\mathcal{X})$.

Le théorème de réduction semi-stable garantit l'existence d'une extension finie k de \mathbb{Q}_v ainsi que d'un $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -morphisme propre $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ tels que :

- \mathcal{Y} soit une $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -courbe simplement semi-stable, de fibre générique $X_v \otimes_{\mathbb{Q}_v} k$;
- f_η soit la projection canonique de $X_v \otimes_{\mathbb{Q}_v} k$ sur X_v .

Vu la définition de la métrique $\|\cdot\|_{\mathcal{L}}$, le point (i) du théorème 3.2.10 implique la formule

$$\int_{\{\xi\}} c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) = \int_{f_\eta^{-1}(\{\xi\})} c_1(f_\eta^* L, \|\cdot\|_{f^* \mathcal{L}}),$$

$\xi \in S_0(\mathcal{X})$.

Pour tout point $\xi \in S_0(\mathcal{X})$ (resp. $\xi' \in S_0(\mathcal{Y})$), la multiplicité $e(\xi)$ (resp. $e(\xi')$) de la composante $[r_v(\xi)]$ (resp. $[r_v(\xi')]$) dans le cycle 1-codimensionnel $[\mathcal{X}_s]$ (resp. $[\mathcal{Y}_s]$) est le cardinal du groupe fini $|\mathcal{H}(\xi)^\times|/|\mathbb{Q}_v^\times|$; pour tout point $\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)$, l'identité

$$e(k/\mathbb{Q}_v) = e(\xi'/\xi)e(\xi),$$

est de vérification immédiate.

Le cycle 1-codimensionnel sur \mathcal{Y} associé à sa fibre spéciale comme $\mathrm{Spf}(k^\circ)$ -courbe formelle est

$$[\mathcal{Y}_{s(v)}]' = \sum_{\xi' \in S_0(\mathcal{X})} [r_v(\xi')]$$

et

$$\begin{aligned} f_*[\mathcal{Y}_{s(v)}]' &= \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} \left(\sum_{\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)} [\widetilde{\mathcal{H}(\xi')} : \widetilde{\mathcal{H}(\xi)}] \right) [r_v(\xi)] \\ &= \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} \left(\sum_{\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)} \frac{[\mathcal{H}(\xi') : \mathcal{H}(\xi)]}{e(\xi'/\xi)} \right) [r_v(\xi)] \\ &= \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} \left(\sum_{\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)} \frac{[\mathcal{H}(\xi') : \mathcal{H}(\xi)]}{e(k/\mathbb{Q}_v)} \right) e(\xi) [r_v(\xi)] \\ &= \frac{[k : \mathbb{Q}_v]}{e(k/\mathbb{Q}_v)} \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} e(\xi) [r_v(\xi)] \\ &= [\widetilde{k} : \widetilde{\mathbb{Q}_v}] [\mathcal{X}_{s(v)}]. \end{aligned}$$

Nous obtenons finalement l'identité

$$\begin{aligned} c_1(\mathcal{L}) \cap e(\xi) [r_v(\xi)] &= \frac{1}{[\widetilde{k} : \widetilde{\mathbb{Q}_v}]} c_1(\mathcal{L}) \cap f_* \left(\sum_{\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)} [r_v(\xi')] \right) \\ &= \frac{1}{[\widetilde{k} : \widetilde{\mathbb{Q}_v}]} f_* \left(c_1(f^* \mathcal{L}) \cap \left(\sum_{\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)} [r_v(\xi')] \right) \right) \end{aligned}$$

dans $\mathrm{CH}_0(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Q}$ par application de la formule de projection, d'où l'on déduit la formule

$$\begin{aligned} \deg(c_1(\mathcal{L}) \cap e(\xi)[r_v(\xi)]) &= \deg_{\mathbb{Q}_v}^-(c_1(\mathcal{L}) \cap e(\xi)[r_v(\xi)]) \\ &= \deg_k^-(c_1(f^*\mathcal{L}) \cap \left(\sum_{\xi' \in f_\eta^{-1}(\xi)} [r_v(\xi')] \right)). \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver le lemme lorsque la $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -courbe \mathcal{X} est simplement semi-stable, ce qui implique en particulier $e(\xi) = 1$ pour tout $\xi \in \mathrm{S}_0(\mathcal{X})$. Soient ξ un point dans $\mathrm{S}_0(\mathcal{X})$, C la composante irréductible de $\mathcal{X}_{s(v)}$ de point générique $r_v(\xi)$ et $\alpha \in \mathbb{Q}_v$ tel que $\|\alpha s\|(\xi) = 1$; αs induit alors une section méromorphe régulière σ du faisceau inversible $\mathcal{L}|_C$. Quitte à effectuer des éclatements centrés sur le lieu lisse de \mathcal{X} , il est loisible de supposer que tous les pôles et zéros de σ sont contenus dans $C \cap \mathrm{Sing}(\mathcal{X}_{s(v)})$. Dans ces conditions, la fonction $-\log \|s\|$ se factorise par le squelette $S(\mathcal{X})$ au voisinage de ξ et l'identité

$$\int_{\{\xi\}} c_1(L, \|\cdot\|_{\mathcal{L}}) = \int_{\{\xi\}} \mathrm{dd}^c(-\log \|s\|_{\mathcal{L}}) = \deg(\mathrm{div}(\sigma)) = \deg_{\mathcal{L}}(C) = \deg(c_1(\mathcal{L}) \cap [r_v(\xi)])$$

découle du lemme 2.2.25. □

4.2.2. Situation globale.

Donnons maintenant la version globale des définitions précédentes. Soit L un faisceau inversible sur X .

On définit une *métrique lisse* (resp. *continue*, resp. W^1 -*régulière*) sur L comme la donnée d'une famille $(\|\cdot\|_v)_{v \in \mathrm{M}(\mathbb{Q})}$ de métriques lisses (resp. continues, resp. W^1 -régulières) $\|\cdot\|_v$ sur les faisceaux L_v qui satisfait à la condition « adélique » suivante :

il existe une courbe propre \mathcal{X} sur un ouvert non vide U de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibre générique X , ainsi qu'un faisceau inversible \mathcal{L} sur \mathcal{X} prolongeant L , tels que

$$\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{\mathcal{L}_v}$$

pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} qui correspond à un point fermé de U .

Comme précédemment, on parlera parfois de métriques A^0 -régulières (resp. C^0 -régulières) en lieu et place de métriques lisses (resp. continues) et, étant donné $\mathcal{E} \in \{A^0, C^0, W^1\}$, un faisceau inversible muni d'une métrique \mathcal{E} -régulière sera dit \mathcal{E} -*métrisé*.

L'ensemble $\widehat{\mathrm{Pic}}(X; \mathcal{E})$ des classes d'isométrie de faisceaux inversibles \mathcal{E} -métrisés est naturellement muni d'une structure de groupe abélien. L'application de $\widehat{\mathrm{Pic}}(X; \mathcal{E})$ dans $\mathrm{Pic}(X)$ obtenue en faisant abstraction de la métrique est un homomorphisme de groupes qui s'insère dans la suite exacte courte

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}(X) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Pic}}(X; \mathcal{E}) \longrightarrow \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{E}(X) = \bigoplus_v \mathcal{E}(X_v)$ est l'espace vectoriel réel des métriques \mathcal{E} -régulières sur le faisceau structural \mathcal{O}_X .

PROPOSITION 4.2.6. — *Étant donnée une métrique lisse (resp. W^1 -régulière) sur le faisceau inversible L ,*

$$(-\log \|s\|_v)_{v \in \mathrm{M}(\mathbb{Q})} \in \widehat{Z}^1(X; A^0) \quad (\text{resp. } \widehat{Z}^1(X; W^1))$$

pour une (toute) section méromorphe génériquement inversible s de L .

Démonstration. C'est évident. □

Étant donné $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ dans $\widehat{\text{Pic}}(X; \mathcal{E})$, $\mathcal{E} \in \{\mathcal{A}^0, \mathcal{W}^1\}$, l'élément

$$\text{dd}^c(-\log \|s\|) + \delta_{\text{div}(s)}$$

de $D^1(X) = \prod_v D^1(X_v)$ ne dépend pas de la section méromorphe et génériquement inversible s de L ; on l'appelle le *courant de courbure de \overline{L}* et il se note $c_1(\overline{L})$.

On définit, grâce à la proposition précédente, un homomorphisme \widehat{c}_1 du groupe $\widehat{\text{Pic}}(X; \mathcal{W}^1)$ dans le groupe $\widehat{\text{CH}}^1(X; \mathcal{W}^1)$ en associant au faisceau inversible métrisé $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ la classe du diviseur d'Arakelov $-\log \|s\|$, s étant une section méromorphe génériquement inversible de L .

Cet homomorphisme coiffe l'isomorphisme « classe de Chern »

$$c_1 : \text{Pic}(X) \rightarrow \text{CH}^1(X)$$

et s'insère dans un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) / \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)^{(1)} & \longrightarrow & \mathcal{W}^1(X) & \longrightarrow & \widehat{\text{Pic}}(X; \mathcal{W}^1) & \longrightarrow & \text{Pic}(X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \widehat{c}_1 & & \downarrow c_1 & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{H}(X) & \longrightarrow & \mathcal{W}^1(X) & \longrightarrow & \widehat{\text{CH}}^1(X; \mathcal{W}^1) & \longrightarrow & \text{CH}^1(X) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

$\Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)$ étant envoyé dans $\text{H}(X) = \bigoplus_v \Gamma(X_v, \mathcal{H}_{X_v})$ via l'homomorphisme $\alpha \mapsto (\log |\alpha|_v)$, de noyau $\Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times)^{(1)}$.

4.2.3. Hauteurs et formule de Mahler généralisée.

Soit $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ un faisceau inversible muni d'une métrique continue sur X . Pour tout point fermé x de X et toute section méromorphe génériquement inversible s de L telle que $x \notin |\text{div}(s)|$, il n'existe qu'un nombre fini de places v de \mathbb{Q} telles que le nombre réel

$$\int_{X_v} (\log \|s\|_v) \delta_{[\text{pr}_v^*(x)]}$$

soit non nul (cf. lemme 4.1.3).

DÉFINITION 4.2.7. — Avec les notations précédentes, le nombre réel

$$h_{\overline{L}}(x) = \int_X (-\log \|s\|) \delta_{[x]} = \sum_{v \in \text{M}(\mathbb{Q})} \int_{X_v} (-\log \|s\|_v) \delta_{[\text{pr}_v^*(x)]}$$

est la hauteur du point fermé x relativement à \overline{L} .

La fonction $h_{\overline{L}}$ s'étend par linéarité au groupe $\text{Div}(X)$.

La formule de Mahler donne une expression intégrale

$$h(\alpha) = h((\alpha, 1)) = \frac{1}{[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]} \int_{S^1} \log |F| \, d\lambda$$

pour la hauteur de Weil h — définie sur $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ muni de coordonnées homogènes (x_0, x_1) par

$$h((x_0, x_1)) = \sum_{v \in \mathbb{Q}} \max(\log |x_0|_v, \log |x_1|_v).$$

Dans la première formule, α est un nombre algébrique, $F \in \mathbb{Z}[T]$ est un polynôme minimal de α sur \mathbb{Z} et λ est la mesure de Haar de masse 1 sur le cercle unité $S^1 \subset \mathbb{C}$. Notant $\overline{\mathcal{O}(1)}$ le faisceau canonique sur $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ muni en toute place v de la métrique v -adique continue définie par

$$-\log \|1_{[\infty]}\|_v(x_0, x_1) = \max(\log |x_0|_v, \log |x_1|_v),$$

la hauteur de Weil sur $\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}})$ n'est pas autre chose que l'application

$$\mathbb{P}^1(\overline{\mathbb{Q}}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{[\kappa(\underline{x}) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}([\underline{x}])$$

où \underline{x} est le point fermé de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ sous-jacent à x . La métrique considérée sur $\mathcal{O}(1)$ est W^1 -régulière, lisse en toute place non archimédienne et son courant de courbure à la place archimédienne est la mesure de Haar de masse 1 sur le cercle S^1 .

Conservant les notations que l'on vient d'introduire, l'application de la proposition 4.1.13 fournit l'identité

$$\int_X (-\log |F|) \star (-\log \|s\|) = 0$$

pour toute section méromorphe génériquement inversible s de $\mathcal{O}(1)$ dont le diviseur est disjoint de $\text{div}(F) = [\underline{\alpha}] - [\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}][[0, 1]]$. Nous pouvons d'autre part utiliser la proposition 4.1.12 pour écrire

$$\int_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1} (-\log |F|) \star (-\log \|s\|) = \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1} (-\log \|s\|) \delta_{\text{div}(F)} + \int_{\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1} (-\log |F|) c_1(\overline{\mathcal{O}(1)}),$$

soit encore

$$0 = h_{\overline{\mathcal{O}(1)}}(\text{div}(F)) - \int_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \log |F| c_1(\overline{\mathcal{O}(1)})_{\infty}$$

vu le choix de F . Il reste à invoquer la nullité de la hauteur du point $(0, 1)$ pour obtenir le résultat désiré.

Observons maintenant que la formule

$$h_{\overline{L}}(D) = \int_X (-\log \|s\|) \delta_D$$

définissant la hauteur garde un sens pour tout diviseur $D \in \text{Div}(X)$ et tout faisceau inversible W^1 -métrisé \overline{L} sur X lorsque la métrique est continue au voisinage du support $|D|$ de D . Nous avons montré au paragraphe 4.1.4 que, sous cette hypothèse, la forme linéaire

$$A^0(X) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi \mapsto \int_X \psi c_1(\overline{L})$$

se prolonge à l'espace $W^1(X)_D = A^0(X)_D + W^1(X)$ en posant

$$\int_X (g + \varphi) c_1(\overline{L}) = \int_X g c_1(\overline{L}) + \int_X \varphi c_1(\overline{L}),$$

avec

$$\int_X g c_1(\overline{L}) = \lim_N \int_X g_N c_1(\overline{L})$$

pour toute fonction $g \in A^0(X)_D$, avec $g_N = \max(\min(g, N), -N)$ (plus une régularisation pour la composante archimédienne).

Remarque 4.2.8. — Lorsque μ_v est une mesure positive, l'existence de ce prolongement implique en particulier la μ_v -intégrabilité des éléments de $W^1(X_v)$.

La seconde assertion de la proposition suivante est une généralisation immédiate de la formule de Mahler.

PROPOSITION 4.2.9. — *Étant donné un faisceau inversible W^1 -métrisé \overline{L} sur X et un diviseur d'Arakelov $(D, g) \in \widehat{Z}^1(X; W^1)$ tels que la métrique de L soit continue au voisinage du support de D ,*

$$\widehat{c}_1(\overline{L}).[(D, g)] = h_{\overline{L}}(D) + \int_X g \, c_1(\overline{L}).$$

En particulier : quelle que soit la fonction méromorphe régulière f sur X ,

$$h_{\overline{L}}(\operatorname{div}(f)) = \int_X \log |f| \, c_1(\overline{L})$$

si la métrique de \overline{L} est continue au voisinage de $|\operatorname{div}(f)|$.

Démonstration. Soit s une section méromorphe régulière de L dont le diviseur est disjoint de $|D|$; le diviseur d'Arakelov $(\operatorname{div}(s), -\log \|s\|) \in \widehat{Z}^1(X; W^1)$ étant continu au voisinage de $|D|$, la proposition 4.1.12 permet d'écrire

$$\begin{aligned} \widehat{c}_1(\overline{L}).[(D, g)] &= \int_X (-\log \|s\|) \star g = \int_X (-\log \|s\|) \, \delta_D + \int_X g \, \omega(-\log \|s\|) \\ &= h_{\overline{L}}(D) + \int_X g \, c_1(\overline{L}). \end{aligned}$$

La seconde assertion de l'énoncé se déduit de la première en utilisant l'égalité

$$\widehat{c}_1(\overline{L}).[(\operatorname{div}(f)), -\log |f|] = 0$$

(proposition 4.1.13). □

Remarque 4.2.10. — On trouvera des exemples explicites de formules de Mahler généralisées dans l'article [30]. Les métriques qui y sont considérées sont associées à des systèmes dynamiques; étant toutes continues et à courbure mesure, elles sont W^1 -régulières et donc dans le champ d'application de la proposition précédente.

4.2.4. Convergence de métriques.

Étant donné un faisceau inversible L sur X , une famille $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ de métriques continues sur L sera dite *uniformément convergente* s'il existe une métrique $\|\cdot\|$ continue sur L et une partie finie S de $M(\mathbb{Q})$ telles que la famille

$$\left(\log \frac{\|\cdot\|_v}{\|\cdot\|_{\alpha, v}} \right)_{\alpha \in A}$$

d'éléments de $C^0(X) = \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q})} C^0(X_v)$ soit contenue et convergente dans le sous-espace vectoriel

$$\bigoplus_{v \in S} C^0(X_v),$$

la topologie étant celle de la convergence uniforme.

On dira qu'une famille de faisceaux inversibles munis de métriques continues $\overline{L}_\alpha = (L_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ est *uniformément convergente* s'il existe un faisceau inversible L sur X et des isomorphismes ι_α de L sur L_α , $\alpha \in A$, tels que la famille de métriques $(\iota_\alpha^* \|\cdot\|_\alpha)$ sur L soit uniformément convergente.

On définit de la même façon la notion de convergence au sens W^1 pour les métriques W^1 -régulières en utilisant la topologie canonique des espaces $W^1(X_v)$, puis la notion de famille W^1 -convergente de faisceaux inversibles W^1 -métrisés.

LEMME 4.2.11. — *Pour toutes familles $(\overline{L}_\alpha)_{\alpha \in A}$, $(\overline{L}'_\alpha)_{\alpha \in A}$ de faisceau inversibles W^1 -réguliers et W^1 -convergentes, de limites respectives \overline{L} , \overline{L}' ,*

$$(c_1(\overline{L}_\alpha).c_1(\overline{L}'_\alpha))_\alpha \rightarrow c_1(\overline{L}).c_1(\overline{L}').$$

Démonstration. Considérons des métriques lisses \overline{L}_0 et \overline{L}'_0 sur les faisceaux inversibles L et L' respectivement et posons $\overline{L}_\beta = \overline{L}$, $\overline{L}'_\beta = \overline{L}'$.

Écrivant, pour tout $\alpha \in A \cup \{\beta\}$, $\overline{L}_\alpha = \overline{L}_0 \otimes \overline{\mathcal{O}(\varphi_\alpha)}$ et $\overline{L}'_\alpha = \overline{L}'_0 \otimes \overline{\mathcal{O}(\varphi'_\alpha)}$ — où $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(\varphi'_\alpha)_{\alpha \in A}$ sont des familles dans $W^1(X)$ convergeant vers φ_β et φ'_β respectivement —, l'assertion découle de la formule

$$c_1(\overline{L}_\alpha).c_1(\overline{L}'_\alpha) = c_1(\overline{L}_0).c_1(\overline{L}'_0) + \int_X \varphi_\alpha \omega(\overline{L}_{-1}) + \int_X \varphi'_\alpha \omega(\overline{L}'_{-1}) - \langle \varphi_\alpha, \varphi'_\alpha \rangle_{\mathcal{D}},$$

$\alpha \in A \cup \{\infty\}$, et de la convergence de chacun des termes du membre de droite. \square

4.2.5. Métriques sous-harmoniques.

Nous achevons cette section en accordant un intérêt particulier aux métriques *sous-harmoniques* sur un faisceau inversible L . Dans le contexte non archimédien, de telles métriques sont déjà apparues au cours du chapitre précédent (3.4.3).

PROPOSITION 4.2.12. — *Soit L un faisceau inversible sur X .*

(i) *Étant donnée une place v de \mathbb{Q} , une métrique $\|\cdot\|_v$ sur L_v est dite sous-harmonique si, pour toute section inversible s de L_v sur un ouvert U de X_v , la fonction $-\text{Log } \|s\|_v$ est sous-harmonique sur U .*

(ii) *Une métrique sous-harmonique sur L est la donnée d'une famille $(\|\cdot\|_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ de métriques sous-harmoniques sur les faisceaux L_v telle qu'il existe une métrique lisse $\|\cdot\|_0$ sur L vérifiant $\|\cdot\|_v = \|\cdot\|_{0,v}$ pour presque toute place v de \mathbb{Q} .*

Convenons de dire qu'une métrique $\|\cdot\|$ sur L est *semi-continue supérieurement* si elle s'écrit sous la forme $\|\cdot\|_0 e^{-\varphi} = (\|\cdot\|_{0,v} e^{-\varphi_v})_v$, où $\|\cdot\|_0$ est une métrique lisse sur L et $\varphi = (\varphi_v)_v$ est une famille *presque nulle* de fonctions semi-continues supérieurement $\varphi_v : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Quelles que soient la place v de \mathbb{Q} et la section inversible s de L_v sur un ouvert U de X_v , la fonction $-\log \|s\|_v$ est alors semi-continue supérieurement sur U .

Il est clair qu'une métrique sous-harmonique sur L n'est pas autre chose qu'une métrique semi-continue supérieurement prenant des valeurs finies sur un ouvert dense de X et telle que le courant de courbure

$$\widehat{c}_1(L, \|\cdot\|) = dd^c(-\log \|s\|) + \delta_{\text{div}(s)}$$

$s \in \Gamma(X, \mathcal{M}_X(L)^\times)$, soit *positif* (chaque composante est un courant positif sur X_v).

En particulier, un faisceau inversible L sur X admet une métrique sous-harmonique si et seulement s'il est de degré positif sur chacune des composantes connexes de X .

THÉORÈME 4.2.13. — *Soit L un faisceau inversible sur X . Toute métrique sous-harmonique $\|\cdot\|$ sur L est l'enveloppe supérieure d'une famille croissante $(\|\cdot\|_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de métriques sous-harmoniques continues telle que $\|\cdot\|_{\lambda,v} = \|\cdot\|_v$ pour presque toute place v de \mathbb{Q} et tout $\lambda \in \Lambda$.*

Si cette métrique est de plus W^1 -régulière, les métriques sont W^1 -convergentes.

Démonstration. Puisque la métrique $\|\cdot\|$ coïncide avec une métrique lisse en dehors d'un nombre fini de places de \mathbb{Q} , les deux assertions de l'énoncé sont de nature locale : quelle que soit la place $v \in M(\mathbb{Q})$, il faut montrer que la métrique sous-harmonique $\|\cdot\|_v$ sur L_v est l'enveloppe

supérieure d'une famille de métriques sous-harmoniques continues, avec convergence au sens W^1 si $\|\cdot\|_v$ est W^1 -régulière.

Dans le cas d'une place non archimédienne v , le théorème 3.4.19 fournit une famille croissante de métriques sous-harmoniques lisses $\|\cdot\|_\lambda$ sur L_v dont $\|\cdot\|_v$ est l'enveloppe supérieure. Écrivons $\|\cdot\|_v$ (resp. $\|\cdot\|_\lambda$) sous la forme $\|\cdot\|_{0,v}e^{-\varphi_v}$ (resp. $\|\cdot\|_\lambda = \|\cdot\|_0e^{-\varphi_\lambda}$), où $\|\cdot\|_{0,v}$ est une métrique lisse sur L_v et $\varphi_v, \varphi_\lambda$ sont des fonctions semi-continues supérieurement sur X_v , φ_v étant l'enveloppe inférieure de la famille décroissante (φ_λ) . La métrique $\|\cdot\|_v$ est W^1 -régulière si et seulement si $\varphi_v \in W^1(X_v)$. Dans ce cas :

$$\sup_\lambda \left(- \int_{X_v} \varphi_\lambda \, dd^c \varphi_\lambda \right) = \left(- \int_{X_v} \varphi_v \, dd^c \varphi_v \right) < +\infty$$

et la famille (φ_λ) est donc W^1 -convergente.

Le cas de la place archimédienne $v = \infty$ se traite de façon analogue à partir de la proposition suivante. \square

PROPOSITION 4.2.14. — *Soient M une surface de Riemann compacte et L un faisceau inversible sur M . Toute métrique sous-harmonique $\|\cdot\|$ sur L est l'enveloppe supérieure d'une famille croissante de métriques sous-harmoniques continues.*

Remarque 4.2.15. — Il est connu que, pour tout faisceau inversible ample sur une variété projective lisse complexe X , une métrique plurisousharmonique *continue* sur L est l'enveloppe supérieure (uniforme) d'une suite croissante de métriques plurisousharmoniques lisses (voir [22], Théorème 4.6.1, ainsi que [14], Theorem 2.18). L'auteur n'a par contre trouvé nulle part mention du résultat ci-dessus.

Les arguments utilisés pour établir le théorème d'approximation d'une métrique (sous-harmonique) continue par des métriques (sous-harmoniques) lisses ne semblent pas pouvoir s'adapter pour établir notre assertion. La démonstration qui suit est inspirée de celle donnée dans le contexte non archimédien (Théorème 3.4.19).

Démonstration de la proposition. On appelle *disque ouvert* dans M un ouvert D dont l'adhérence \bar{D} est contenue dans le domaine d'une carte locale et a pour image un disque fermé de \mathbb{C} . Étant donné un recouvrement fini \mathcal{U} de M par des disques ouverts, posons

$$S(\mathcal{U}) = \bigcup_{D \in \mathcal{U}} \partial D ;$$

c'est une courbe réelle-analytique par morceaux tracée sur M .

Fixons une section méromorphe régulière (génériquement inversible) s de L et considérons l'ensemble Σ des couples $(\mathcal{U}, \mathcal{V})$ formés d'un recouvrement fini \mathcal{U} de M par des disques ouverts et d'un recouvrement fini \mathcal{V} de $S(\mathcal{U})$ par des disques ouverts tels que :

- $M - S(\mathcal{U})$ soit un voisinage du support du diviseur de s (i.e. $|\operatorname{div}(s)| \cap S(\mathcal{U}) = \emptyset$) ;
- $\operatorname{div}(s)$ soit principal sur $M - S(\mathcal{U})$;
- l'adhérence de tout disque $D \in \mathcal{V}$ soit disjointe de $|\operatorname{div}(s)|$.

Nous allons maintenant associer à tout couple $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \in \Sigma$ une métrique sous-harmonique et continue $\|\cdot\|_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ sur L minorant la métrique initiale $\|\cdot\|$. La transcription directe de ce que l'on a fait dans le contexte non archimédien pour démontrer le résultat analogue conduit à remplacer la métrique initiale $\|\cdot\|$ par son « interpolation harmonique » en dehors de $S(\mathcal{U})$; cela n'est toutefois ici pas suffisant pour fournir une métrique continue et il est nécessaire,

préalablement, de régulariser la restriction de $\|\cdot\|$ à $S(\mathcal{U})$ à l'aide du recouvrement \mathcal{V} . Voici les détails.

Première étape. Soit, pour tout disque $D \in \mathcal{V}$, $H_D(-\log \|s\|)$ la fonction semi-continue supérieurement sur \overline{D} qui coïncide avec $-\log \|s\|$ sur ∂D et est harmonique sur D . L'existence de cette fonction se démontre comme le point (i) de la proposition 3.1.21. La fonction $H_D(-\log \|s\|)$ majore la fonction sous-harmonique $-\log \|s\|$ sur \overline{D} . Soit V l'ouvert réunion des $D \in \mathcal{V}$ et soit x un point dans ∂D . Puisque $H_D(-\log \|s\|)(x) = -\log \|s\|(x)$, $H_D(-\log \|s\|)(x) \leq H_{D'}(-\log \|s\|)(x)$ pour tout disque $D' \in \mathcal{V}$ contenant x en vertu de l'observation précédente et donc

$$\max_{D \in \mathcal{V}, x \in D} H_D(-\log \|s\|)(x) = \max_{D \in \mathcal{V}, x \in \overline{D}} H_D(-\log \|s\|)(x).$$

Soit $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ la fonction définie sur V par :

$$H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)(x) = \max_{D \in \mathcal{V}, x \in D} H_D(-\log \|s\|)(x).$$

Le premier terme de l'identité

$$\max_{D \in \mathcal{V}, x \in D} H_D(-\log \|s\|)(x) = \max_{D \in \mathcal{V}, x \in \overline{D}} H_D(-\log \|s\|)(x),$$

$x \in V$, met en évidence la semi-continuité inférieure de $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ (enveloppe supérieure d'une famille de fonctions continues) tandis que le second établit sa semi-continuité supérieure (enveloppe supérieure d'une famille finie de fonctions semi-continues supérieurement) ; la fonction $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ est donc continue.

La sous-harmonicité de $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ est évidente vu la définition et, pour toute fonction méromorphe régulière f sur M inversible sur V , la formule

$$H_{\mathcal{V}}(-\log \|fs\|) = H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|) - \log |f|$$

se déduit de l'harmonicité de $-\log |f|$ sur V .

Considérons enfin un raffinement \mathcal{V}' de \mathcal{V} .  tant donné un disque $D' \in \mathcal{V}'$ contenu dans un disque $D \in \mathcal{V}$,

$$H_{D'}(-\log \|s\|)|_{\partial D'} = -\log \|s\||_{\partial D'} \leq H_D(-\log \|s\|)|_{\partial D'}$$

donc

$$H_{D'}(-\log \|s\|) \leq H_D(-\log \|s\|)|_{\overline{D'}}$$

et ainsi

$$H_{\mathcal{V}'}(-\log \|s\|) \leq H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|).$$

Soit alors $R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ la restriction de la fonction continue $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$   $S(\mathcal{U}) \subset V$. On a les inégalités

$$-\log \|s\||_{S(\mathcal{U})} \leq R_{\mathcal{V}'}(-\log \|s\|) \leq R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$$

pour tout raffinement \mathcal{V}' de \mathcal{V} et, lorsque \mathcal{V} parcourt l'ensemble filtrant des recouvrements de $S(\mathcal{U})$ dans M , la famille décroissante des $R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ converge ponctuellement vers $-\log \|s\||_{\mathcal{U}}$ en vertu de la semi-continuité supérieure de $-\log \|s\|$.

Seconde  tape. Considérons maintenant la fonction $-\log \|s\||_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ sur M définie comme suit :

- la fonction $-\log \|s\||_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}$ co incide avec $R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ sur $S(\mathcal{U})$,
- pour toute composante connexe Ω de $M - S(\mathcal{U})$ et toute équation f de $\text{div}(s)$ au voisinage de $\overline{\Omega}$, $-\log \|s\||_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} + \log |f|$ est la fonction harmonique sur Ω qui co incide avec $R_{\mathcal{V}}(-\log \|f^{-1}s\|)$ sur $\partial\Omega$.

La seconde condition ne dépend pas du choix de f en vertu de la formule

$$R_{\mathcal{V}}(-\log \|fs\|_{\mathcal{V}}) = R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|) - \log |f|$$

lorsque f est inversible au voisinage de $S(\mathcal{U})$. En particulier, pour toute composante connexe Ω de $M - S(\mathcal{U})$ disjointe de $|\operatorname{div}(s)|$, $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est la fonction harmonique sur Ω qui coïncide avec $R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ sur $\partial\Omega$. Vu la continuité de $R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$, cette observation implique immédiatement la continuité des restrictions de $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ à l'adhérence de chaque composante connexe de $M - S(\mathcal{U})$ disjointe de $|\operatorname{div}(s)|$. On obtient le même résultat pour les composantes rencontrant $|\operatorname{div}(s)|$ en utilisant la formule ci-dessus.

La fonction $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est harmonique sur $X - (S(\mathcal{U}) \cup |\operatorname{div}(s)|)$ et elle majore $-\log \|s\|$ sur M ; jointe au fait que $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ et $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ coïncident sur $S(\mathcal{U})$, cette observation montre que la fonction $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ majore $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ sur V .

Il est facile de voir que la fonction $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ est sous-harmonique sur $M - |\operatorname{div}(s)|$. Soient en effet x un point dans $S(\mathcal{U})$, $D \in \mathcal{V}$ un disque contenant x , U un voisinage relativement compact de x dans D et h une fonction harmonique sur U qui majore $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ sur ∂U . La fonction h majore alors $H_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ sur U , donc sur $U \cap S(\mathcal{U})$, et elle majore par conséquent $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ sur la frontière de l'ouvert $U' = U - S(\mathcal{U}) \cap U$. En vertu de l'harmonicité de cette dernière fonction sur U' , le principe du maximum permet de conclure que h majore $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ sur U . D'où la sous-harmonicité annoncée.

Considérons enfin un autre couple $(\mathcal{U}', \mathcal{V}') \in \Sigma$ avec $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ — ce qui implique $S(\mathcal{U}) \subset S(\mathcal{U}')$ — et tel que le recouvrement de $S(\mathcal{U})$ défini par \mathcal{V}' soit un raffinement du recouvrement \mathcal{V} . On a alors $R_{\mathcal{V}'}(-\log \|s\|) \leq R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ sur $S(\mathcal{U})$ d'après la première étape, c'est-à-dire

$$-\log \|s\|_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'} \leq -\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$$

sur $S(\mathcal{U})$; par suite, pour toute composante connexe Ω de $M - S(\mathcal{U})$ disjointe de $|\operatorname{div}(s)|$, la sous-harmonicité de $-\log \|s\|_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}$ et l'harmonicité de $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$ sur Ω impliquent

$$-\log \|s\|_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'} \leq -\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}}$$

sur $\overline{\Omega}$. Le même argument, appliqué en remplaçant s par $f^{-1}s$, établit cette inégalité lorsque Ω rencontre $|\operatorname{div}(s)|$, f étant une équation de $\operatorname{div}(s)$ dans Ω .

Nous pouvons maintenant conclure. L'ensemble Σ est ordonné de sorte que $(\mathcal{U}, \mathcal{V}) \prec (\mathcal{U}', \mathcal{V}')$ si $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}'$ et si le recouvrement \mathcal{V}' de $S(\mathcal{U})$ est un raffinement de \mathcal{V} . C'est évidemment un ensemble filtrant, deux couples $(\mathcal{U}, \mathcal{V}), (\mathcal{U}', \mathcal{V}') \in \Sigma$ étant majorés par le couple $(\mathcal{U}'', \mathcal{V}'') \in \Sigma$, où $\mathcal{U}'' = \mathcal{U} \cup \mathcal{U}'$ et \mathcal{V}'' est un raffinement de \mathcal{V}' qui induit un recouvrement de $S(\mathcal{U})$ raffinant \mathcal{V} (noter que tous ces recouvrements sont par définition finis).

L'enveloppe supérieure des métriques $(\|\cdot\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}})$ sur L est une métrique sous-harmonique majorée par $\|\cdot\|$ et qui converge ponctuellement vers $\|\cdot\|$. Ce dernier point se vérifie sur $M - |\operatorname{div}(s)|$ — ce qui est suffisant en vertu de la semi-continuité supérieure — en remarquant que $-\log \|s\|_{\mathcal{U},\mathcal{V}} = R_{\mathcal{V}}(-\log \|s\|)$ sur $S(\mathcal{U})$ converge ponctuellement vers $-\log \|s\|$ lorsque \mathcal{V} croît (première étape), puis en observant que tout point $y \in M - |\operatorname{div}(s)|$ appartient à $S(\mathcal{U})$ pour un choix convenable de \mathcal{U} . \square

Remarque 4.2.16. — On démontrerait de façon analogue que, pour toute fonction sous-harmonique u sur une surface de Riemann M , la restriction de u à un ouvert relativement compact $\Omega \subset M$ est l'enveloppe inférieure d'une famille décroissante de fonctions sous-harmoniques continues sur Ω .

4.3. Comparaison avec d'autres approches de la théorie d'Arakelov.

4.3.1. Utilisation d'un modèle entier.

Il est temps de relier les considérations précédentes à la théorie d'Arakelov utilisant des modèles entiers, telle que développée dans l'article [11].

Soit \mathcal{X} une courbe propre sur $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, de fibre générique X et dont le schéma sous-jacent est supposé normal. Le groupe des 1-cycles (= diviseurs de Weil) sur \mathcal{X} est noté $Z^1(\mathcal{X})$.

Rappelons que, pour toute place non archimédienne v de \mathbb{Q} , $s(v)$ désigne le point fermé de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ correspondant et \mathcal{X}_v est le complété de \mathcal{X} le long de la fibre $\mathcal{X}_{s(v)}$; c'est un $\text{Spf}(\mathbb{Z}_v)$ -schéma formel de fibre générique X_v . L'hypothèse de normalité sur \mathcal{X} implique que le sous-ensemble (fini) $S_0(\mathcal{X}_v)$ de X_v est en bijection avec l'ensemble des points génériques de $\mathcal{X}_{s(v)}$ à travers l'application de réduction $r_v : X_v \rightarrow \mathcal{X}_{s(v)}$.

Comme précédemment, le morphisme canonique $X_v \rightarrow X$ est noté pr_v .

Cycles horizontaux – Quels que soient le point fermé x de X et la place non archimédienne v de \mathbb{Q} , nous noterons $g_{x,v}^{\mathcal{X}}$ le *potentiel d'équilibre* du diviseur $\text{pr}_v^*[x] = \sum_{y \in \text{pr}_v^{-1}(x)} [y]$ dans l'ouvert $X_v - S_0(\mathcal{X}_v)$; c'est l'unique fonction continue $g : X_v \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ qui est identiquement nulle sur $S_0(\mathcal{X}_v)$ et telle que $\text{dd}^c g = -\delta_{\text{pr}_v^*[x]}$ sur $X_v - S_0(\mathcal{X}_v)$. On prolonge par linéarité cette construction en un homomorphisme

$$\text{Div}(X) \rightarrow A^0(X_v)_{\log}, \quad D \mapsto g_{D,v}^{\mathcal{X}}.$$

Cycles verticaux – Étant donné une place non archimédienne v de \mathbb{Q} et un point $\xi \in S_0(\mathcal{X}_v)$, $\text{pr}_v(\xi)$ est un point générique de X et $\mathcal{H}(\xi)$ est la complétion du corps $\kappa(\text{pr}_v(\xi))$ pour la valuation définie par l'ordre d'annulation le long de la composante irréductible $\overline{\{r_v(\xi)\}}$ de $\mathcal{X}_{s(v)}$. Tenant compte du fait que la valeur absolue sur $\kappa(\xi)$ prolonge celle de \mathbb{Q}_v , il découle de cette observation que le cardinal $e(\xi)$ du groupe fini $|\kappa(\xi)^\times|/|\mathbb{Q}_v^\times|$ est égal à la multiplicité de la composante $\overline{\{r_v(\xi)\}}$ dans le cycle $[\mathcal{X}_{s(v)}]$.

On note $g_\xi^{\mathcal{X}}$ la fonction dans $A^0(X_v)$ qui est harmonique sur $X_v - S_0(\mathcal{X}_v)$, nulle sur $S_0(\mathcal{X}_v) - \{\xi\}$ et qui prend la valeur $e(\xi)^{-1} \log |p_v|$ au point ξ .

Nous disposons, pour toute place non archimédienne $v \in M(\mathbb{Q})$, d'un homomorphisme de groupes

$$\mathfrak{d}_v : \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}_v), \mathbb{Z}) \rightarrow Z^1(\mathcal{X}), \quad b \mapsto \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X})} b(\xi) [r_v(\xi)].$$

L'homomorphisme somme

$$\mathfrak{d} = \oplus_v \mathfrak{d}_v : \bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q}) - \{\infty\}} \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}_v), \mathbb{Z}) \rightarrow Z^1(\mathcal{X})$$

réalise un isomorphisme sur le sous-groupe $Z^1(\mathcal{X})_{\text{vert}}$ des 1-cycles *verticaux*, noyau de l'homomorphisme de restriction à la fibre générique

$$Z^1(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Div}(X), \quad Z \mapsto Z_{\mathbb{Q}}.$$

On note d'autre part

$$\sigma : \text{Div}(X) \rightarrow Z^1(\mathcal{X})$$

la section obtenue en envoyant tout point fermé de X sur son adhérence dans \mathcal{X} .

Nous pouvons finalement utiliser la décomposition

$$\left(\bigoplus_{v \in M(\mathbb{Q}) - \{\infty\}} \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}_v), \mathbb{Z}) \right) \oplus \text{Div}(X) \xrightarrow{\sim} Z^1(\mathcal{X})$$

$$(b, D) \mapsto \mathfrak{d}(b) + \sigma(D)$$

pour définir un homomorphisme de groupes

$$g^{\mathcal{X}} : Z^1(\mathcal{X}) \rightarrow \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} A^0(X_v)_{\log}$$

en associant à l'élément $Z = \mathfrak{d}(b) + \sigma(D)$ de $Z^1(\mathcal{X})$ la collection des

$$g^{\mathcal{X}}(Z)_v = \sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X}_v)} b(\xi) g_{\xi}^{\mathcal{X}} + g_{D,v}^{\mathcal{X}},$$

$v \in M(\mathbb{Q}) - \{\infty\}$.

Cet homomorphisme est trivialement *injectif*.

Suivant [11], $\widehat{Z}^1(\mathcal{X})$ désigne le sous-groupe de $Z^1(\mathcal{X}) \times W^1(X_{\infty})_{\log}$ constitué par les couples (Z, g_{∞}) tels que $\text{div}(g_{\infty}) = p_{\infty}^*(Z_{\mathbb{Q}})$. Son quotient par le sous-groupe image de l'homomorphisme

$$\Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^{\times}) \rightarrow \widehat{Z}^1(\mathcal{X}), \quad f \mapsto (\text{div}(f), -\log |f_{\infty}|),$$

noté $\widehat{\text{CH}}^1(\mathcal{X})$, est le *groupe de Chow arithmétique*. Il est muni d'une forme bilinéaire symétrique, *l'accouplement d'intersection d'Arakelov*, décrite au paragraphe 5.3 de l'article précédemment cité.

PROPOSITION 4.3.1. — *L'application*

$$\widehat{Z}^1(\mathcal{X}) \rightarrow D^1(X) = \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} D^1(X_v)$$

$$(Z, g_{\infty}) \mapsto (g_{\infty}; g^{\mathcal{X}}(Z))$$

est un isomorphisme sur un sous-groupe de $\widehat{Z}^1(X; W^1)$. Elle induit un homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{X}} : \widehat{\text{CH}}^1(\mathcal{X}) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1)$$

tel que l'accouplement d'intersection d'Arakelov de deux classes $x, y \in \widehat{\text{CH}}^1(\mathcal{X})$ soit le produit $\gamma_{\mathcal{X}}(x) \cdot \gamma_{\mathcal{X}}(y)$.

Démonstration. L'appartenance de $(g_{\infty}; g^{\mathcal{X}}(Z))$ au sous-groupe $\widehat{Z}^1(X; W^1)$ est évidente pour tout $(Z, g_{\infty}) \in \widehat{Z}^1(\mathcal{X})$.

L'application considérée étant injective, c'est un isomorphisme de $\widehat{Z}^1(\mathcal{X})$ sur un sous-groupe de $\widehat{Z}^1(X; W^1)$.

Soient $f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^{\times})$ et v une place non archimédienne de \mathbb{Q} . L'élément b de

$$\bigoplus_{v \neq \infty} \text{Hom}(S_0(\mathcal{X}_v), \mathbb{Z})$$

tel que

$$\text{div}(f) = \mathfrak{d}(b) + \sigma(\text{div}(f_{\mathbb{Q}}))$$

étant défini par $b(\xi) = \text{ord}_{r_v(\xi)}(f)$,

$$b(\xi)g_\xi^{\mathcal{X}}(\xi) = -\frac{b(\xi)}{e(\xi)} \log |p_v| = -\log |\text{pr}_v^* f_{\mathbb{Q}}|(\xi)$$

pour tout $\xi \in S_0(\mathcal{X}_v)$.

La fonction

$$-\log |\text{pr}_v^* f| - g_{\text{div}(f_{\mathbb{Q}}),v}^{\mathcal{X}}$$

est lisse (formule de Poincaré-Lelong) et harmonique sur $X_v - S_0(\mathcal{X}_v)$. Le calcul précédent montre qu'elle coïncide avec la fonction $\sum_{\xi \in S_0(\mathcal{X}_v)} b(\xi)g_\xi^{\mathcal{X}}$ sur $S_0(\mathcal{X}_v)$ et il reste à appliquer le principe du maximum pour en déduire l'identité

$$-\log |\text{pr}_v^* f| = g^{\mathcal{X}}(\text{div}(f))_v.$$

L'homomorphisme

$$\widehat{Z}^1(\mathcal{X}) \rightarrow \widehat{Z}^1(X; W^1)$$

envoie ainsi le sous-groupe $\{(\text{div}(f), -\log |f_\infty|) ; f \in \Gamma(\mathcal{X}, \mathcal{M}_{\mathcal{X}}^\times)\}$ dans $\widehat{\text{Pr}}(X)$ et induit par conséquent un homomorphisme

$$\gamma_{\mathcal{X}} : \widehat{\text{CH}}^1(\mathcal{X}) \rightarrow \widehat{\text{CH}}^1(X; W^1).$$

Comme expliqué dans [11], on peut se contenter de définir le produit d'intersection sur $\widehat{\text{CH}}^1(\mathcal{X}, W^1)$ lorsque \mathcal{X} est un schéma *régulier*.

Soient alors (Z, g_∞) et (Z', g'_∞) deux diviseurs d'Arakelov dans $\widehat{Z}^1(\mathcal{X})$ tels que les cycles Z et Z' aient des supports génériquement disjoints. Vu la formule

$$(Z, g_\infty) \cdot (Z', g'_\infty) = \deg(Z \cdot Z') + \int_{X_\infty} g_\infty \star g'_\infty,$$

l'égalité

$$(Z, g_\infty) \cdot (Z', g'_\infty) = \gamma_{\mathcal{X}}([Z, g_\infty]) \cdot \gamma_{\mathcal{X}}([Z', g'_\infty])$$

découle du lemme 4.2.5 et du lemme suivant. □

LEMME 4.3.2. — *Supposons le schéma \mathcal{X} régulier et soit $Z \in Z^1(\mathcal{X})$; le faisceau inversible $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}(Z)$ définit une métrique lisse sur le faisceau $\mathcal{O}_X(Z_{\mathbb{Q}})$ et, pour toute place non archimédienne de \mathbb{Q} ,*

$$g^{\mathcal{X}}(Z)_v = -\log \|1_{Z_{\mathbb{Q}}}\|_v.$$

Démonstration. Il suffit, par linéarité, de traiter deux cas : $Z = \sigma(x)$, x étant un point fermé de X , et $Z = [r_v(\xi)]$, $\xi \in S_0(\mathcal{X})$.

Étant donné un point fermé $x \in X$ d'adhérence Z dans \mathcal{X} , il existe un voisinage ouvert U de $r_v(x)$ dans \mathcal{X} sur lequel Z est principal ; posons $U_v = U \cap \mathcal{X}_{s(v)}$. Une équation f de Z dans U détermine une fonction holomorphe $f_v \in \Gamma(r_v^{-1}(U_v), \mathcal{O}_{X_v})$ telle que $-\log |f_v|_v$ s'annule sur $r^{-1}(U_v) - r_v^{-1}(r_v(x))$ (car f est inversible sur $U_v - \{r_v(x)\}$) et vérifie l'équation

$$\text{dd}^c(-\log |f_v|_v) = -\delta_{\text{pr}_v^*[x]}$$

dans $r_v^{-1}(U_v) - S_0(\mathcal{X}_{v|U_v})$. On en déduit l'identité entre $-\log \|1_{[x]}\|_{|r_v^{-1}(U_v)} = -\log |f_v|_v$ et la restriction de $g_{[x],v}^{\mathcal{X}}$ au domaine k -analytique $r_v^{-1}(U_v)$. Puisque

$$-\log \|1_{Z_{\mathbb{Q}}}\|_v = g_{[x],v}^{\mathcal{X}} = 0$$

sur $X_v - r_v^{-1}(r_v(x))$, l'égalité

$$g_{[x],v}^{\mathcal{X}} = -\log \|1_{Z_{\mathbb{Q}}}\|_v$$

est démontrée. \square

4.3.2. Métriques adéliques.

Soit L un faisceau inversible sur X . Suivant Zhang [33], une *métrique adélique* sur L est la donnée, pour toute place v de \mathbb{Q} , d'une métrique v -adique $||.||_v$ sur la restriction de L_v à $(X_v)_0 = X(\overline{\mathbb{Q}_v})/\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_v}/\mathbb{Q}_v)$, de telle sorte que la famille $(||.||_v)$ satisfasse aux conditions suivantes :

- pour toute place v , la métrique $||.||_v$ est continue et bornée ;
- il existe un ouvert non vide $U \subset \text{Spec}(\mathbb{Z})$, une courbe propre \mathcal{X} sur U de fibre générique X et un faisceau inversible \mathcal{L} prolongeant L sur \mathcal{X} tels que, pour toute place v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de U , la métrique $||.||_v$ coïncide avec la (restriction de la) métrique $||.||_{\mathcal{L}_v}$.

Toute métrique continue sur L est uniquement déterminée par la métrique adélique qu'elle induit via les applications de restriction $X_v \rightarrow (X_v)_0$. Vu la densité des métriques lisses dans l'espace des métriques continues, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une métrique adélique sur L soit la restriction d'une métrique continue est qu'elle soit une limite uniforme de métriques adéliques lisses. Ce dernier résultat est démontré en toute dimension par W.Gubler ([17], Theorem 7.12) qui établit plus précisément la densité de l'espace des fonctions lisses dans celui des fonctions continues pour tout espace analytique (quasi-compact) sur un corps non archimédien non trivial.

THÉORÈME 4.3.3. — *Les métriques adéliques semi-positives (resp. intégrables) au sens de [33] sont exactement les (restrictions des) métriques continues dont le courant de courbure est une mesure positive (resp. une mesure).*

Démonstration. Les métriques adéliques intégrables étant, par définition, les quotients de métriques adéliques semi-positives, il suffit d'établir la caractérisation des métriques adéliques semi-positives puis d'utiliser le fait que toute mesure de Radon sur un espace topologique localement compact et la différence de deux mesures de Radon positives.

Les métriques semi-positives algébriques sur un faisceau inversible L au sens de [33] sont les métriques définies par prolongement semi-positifs des puissances de L sur les modèles entiers de X , équipés à la place archimédienne de métriques hermitiennes C^∞ dont la forme de courbure est semi-positive. Par application du lemme 4.2.5, ces métriques sont exactement les restrictions des métriques lisses dont le courant de courbure est semi-positif. Puisque les métriques adéliques semi-positives sont par définition les limites uniformes de métriques algébriques semi-positives, il en découle que ce sont des restrictions de métriques continues à courant de courbure positif.

Établissons maintenant l'assertion réciproque. Toute métrique continue dont le courant de courbure est positif est sous-harmonique. Une telle métrique est l'enveloppe supérieure uniforme d'une famille de métriques sous-harmoniques et lisses : dans le cas d'une place non archimédienne, on vérifie exactement comme dans la démonstration de la proposition 3.5.6 que, lorsque la métrique est continue, la convergence est uniforme dans la preuve du théorème 3.4.19 ; dans le cas de la place archimédienne, on utilise le résultat mentionné à remarque 4.2.15. La restriction d'une telle métrique, étant la limite d'une suite de métriques algébriques semi-positives, est donc bien une métrique adélique semi-positive. \square

4.3.3. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique.

Étant donnés une courbe propre et lisse X sur \mathbb{Q} , un faisceau inversible L muni d'une métrique localement bornée $\|\cdot\|$ et un entier naturel N , posons :

$$B_v(\overline{L}, N) = \{s \in H^0(X_v, L_v^{\otimes N}) ; \sup_{X_v} \|s\|_v \leq 1\}$$

pour toute place v de \mathbb{Q} et

$$B(\overline{L}, N) = \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} B_v(\overline{L}, N) \subset \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} H^0(X_v, L_v^{\otimes N}) = \prod_{v \in M(\mathbb{Q})} H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_v.$$

Soit \mathbf{A} l'anneau des adèles de \mathbb{Q} ; $H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}$ est un groupe topologique localement compact (commutatif) dans lequel $H^0(X, L^{\otimes N})$ est un sous-groupe discret, le quotient

$$H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A} / H^0(X, L^{\otimes N})$$

étant compact.

LEMME 4.3.4. — *Pour toute mesure de Haar λ sur $H^0(X, L^{\otimes N})$, le produit infini*

$$\prod_{v \in M(\mathbb{Q})} \lambda_v(B_v(\overline{L}, N))$$

est convergent et la mesure de $B(\overline{L}, N)$ est donc bien définie.

Démonstration. Toutes les mesures de Haar sur $H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}$ étant proportionnelles, il suffit d'établir cette assertion pour une mesure de Haar particulière ; on peut également supposer $N = 1$.

Considérons un ouvert dense U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$, une courbe \mathcal{X}/U de fibre générique X et un faisceau inversible \mathcal{L} sur \mathcal{X} prolongeant L ; quitte à restreindre U , on peut supposer que \mathcal{X} est un schéma normal et que la métrique $\|\cdot\|_v$ sur L_v est définie par \mathcal{L}_v pour toute place $v \in M(\mathbb{Q})$ associée à un point de U . Nous définissons une mesure de Haar λ sur $H^0(X, L)$ en prenant pour mesure λ_v

- la mesure de Haar sur $H^0(X_v, L_v)$ qui donne la masse 1 à $H^0(\mathcal{X}_v, \mathcal{L}_v)$ si v correspond à un point de U ;
- une mesure de Haar quelconque sur $H^0(X_v, L_v)$ sinon.

La normalité du schéma \mathcal{X} implique l'identité

$$H^0(\mathcal{X}_v, \mathcal{L}_v) = B_v(\overline{L}, 1)$$

pour toute place v correspondant à un point (fermé) de U ; on a donc

$$\lambda_v(B_v(\overline{L}, 1)) = 1$$

pour presque toute place v de \mathbb{Q} , ce qui établit la convergence du produit des $\lambda_v(B_v(\overline{L}, 1))$ (noter que tous ces nombres réels sont strictement positifs). \square

Le nombre réel

$$\chi(\overline{L}, N) = \log \frac{\lambda(B(\overline{L}, N))}{\lambda(H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A} / H^0(X, L^{\otimes N}))}$$

ne dépend pas du choix de la mesure de Haar λ sur $H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A}$.

La comparaison entre métriques continues et métriques adéliques au sens de Zhang permet de reformuler le théorème 1.7 de l'article [33] sous la forme suivante (en dimension 1).

THÉORÈME 4.3.5. — *Pour tout faisceau inversible métrisé $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ tel que L soit ample, la métrique $\|\cdot\|$ soit continue et le courant de courbure $c_1(\overline{L})$ soit positif,*

$$\chi(\overline{L}, N) = \widehat{c}_1(\overline{L})^2 \frac{N^2}{2} + o(N^2)$$

lorsque N tend vers $+\infty$.

Ce théorème se déduit, par passage à la limite, du théorème de Hilbert-Samuel arithmétique pour les métriques *lisses* à forme de courbure *définie positive*, lui-même conséquence du théorème de Riemann-Roch arithmétique de Gillet-Soulé.

Le théorème précédent admet une généralisation partielle permettant de lever l'hypothèse de positivité sur le courant de courbure $\widehat{c}_1(\overline{L})$.

THÉORÈME 4.3.6. — *Pour tout faisceau inversible métrisé $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ tel que L soit ample et la métrique $\|\cdot\|$ soit continue et W^1 -régulière,*

$$\liminf_N \frac{2}{N^2} \chi(\overline{L}, N) \geq \widehat{c}_1(\overline{L})^2.$$

Démonstration. Lorsque les composantes non archimédiennes de la métrique sont lisses, ce théorème est démontré par Autissier ([2], proposition 3.3.3) à partir du théorème de Riemann-Roch arithmétique de Faltings (en dimension 1). Le cas général s'en déduit immédiatement par application de la proposition 3.5.6 : celle-ci implique en effet immédiatement que tout faisceau inversible L muni d'une métrique continue et W^1 -régulière est la limite uniforme *et* au sens W^1 d'une famille de faisceaux inversibles métrisés $(\overline{L}_\lambda)_\lambda$ telle que l'inégalité

$$\liminf_N \frac{2}{N^2} \chi(\overline{L}_\lambda, N) \geq \widehat{c}_1(\overline{L}_\lambda)^2$$

soit vérifiée. La convergence uniforme implique la convergence du membre de gauche vers

$$\liminf_N \frac{2}{N^2} \chi(\overline{L}, N)$$

tandis que la convergence au sens W^1 implique celle du membre de droite vers

$$\widehat{c}_1(\overline{L})^2$$

en vertu du lemme 4.2.11. □

Le résultat précédent permet, via le théorème de Minkowski, d'exhiber des sections globales de puissances de L de norme majorée en fonction de $\widehat{c}_1(\overline{L})^2$. Précisément, il implique l'existence, pour tout $\varepsilon > 0$, d'un entier naturel $N > 0$ et d'une section globale non nulle s_ε de $L^{\otimes N}$ telle que, pour tout point fermé $x \in X - |\text{div}(s_\varepsilon)|$,

$$\int_X \log \|s_\varepsilon\| \delta_{[x]} = \sum_{v \in M(\mathbb{Q})} \int_{X_v} \log \|s_\varepsilon\|_v \delta_{\text{pr}_v^*[x]} \leq N[\kappa(x) : \mathbb{Q}] \left(-\frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^2}{2\deg_L X} + \varepsilon \right).$$

On en déduit qu'il existe un ouvert dense $U_\varepsilon \subset X$ tel que

$$\frac{1}{[\kappa(x) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}}(x) \geq \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^2}{2\deg_L X} - \varepsilon$$

pour tout point fermé $x \in U_\varepsilon$.

Cette inégalité intervient dans l'étude de problèmes d'équidistribution, pour laquelle nous renvoyons aux articles [2] et [12] ; on trouvera en particulier dans ce dernier la preuve du théorème suivant. Rappelons qu'une suite (x_n) de points fermés de X est dite *générique* si tout fermé de X de dimension 0 ne contient qu'au plus un nombre fini de termes de la suite.

THÉORÈME 4.3.7. — Soit L un faisceau inversible ample sur X muni d'une métrique continue et W^1 -régulière $||\cdot||$. Étant donnée une suite générique (x_n) de points fermés de X telle que la suite

$$\left(\frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}}(x_n) \right)$$

converge vers

$$\frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^2}{2\deg_L(X)},$$

la suite de mesures de probabilité $\left(\frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} \delta_{\text{pr}_v^*([x_n])} \right)$ converge faiblement vers la mesure de probabilité

$$\frac{c_1(\overline{L})_v}{\deg_L(X)}$$

sur X_v , pour toute place v de \mathbb{Q} .

Suivant une idée de P. Autissier, A. Chambert-Loir montre dans [12] comment obtenir des minoration de hauteurs dans des situations où le théorème précédent est en défaut. Le théorème suivant fournit un résultat général dans cette optique et redémontre le théorème 4.3.7.

Étant donnée une place v de \mathbb{Q} , rappelons tout d'abord qu'une mesure μ sur X_v est dite d'énergie finie si elle appartient au sous-espace $A^1(X_v) + \text{dd}^c W^1(X_v)$ de $D^1(X_v)$ (voir la section 3.5). Les mesures d'énergie finie forment un espace vectoriel réel $\mathcal{E}(X_v)$ et l'on note $\mathcal{E}(X_v)_0$ le sous-espace des mesures de masse nulle. Le choix d'une structure hilbertienne sur $W^1(X_v)$ munit $\mathcal{E}(X_v)$ d'un produit scalaire dont la forme quadratique associée est une énergie sur cet espace ; tous ces produits scalaires coïncident toutefois sur $\mathcal{E}(X_v)_0$ avec la forme de Dirichlet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{D}}$, laquelle s'exprime sur le sous-espace $\text{dd}^c A^0(X_v)$ de $\mathcal{E}(X_v)_0$ par la formule :

$$\langle \text{dd}^c \varphi, \text{dd}^c \psi \rangle_{\mathcal{D}} = - \int_{X_v} \varphi \text{dd}^c \psi = \langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{D}}.$$

On note $E(\mu) = \langle \mu, \mu \rangle_{\mathcal{D}}$ l'énergie d'une mesure $\mu \in \mathcal{E}(X_v)_0$ et on convient de poser $E(\mu) = +\infty$ si la mesure μ n'est pas d'énergie finie.

THÉORÈME 4.3.8. — Soit L un faisceau inversible ample sur X , muni d'une métrique continue et W^1 -régulière $||\cdot||$. Étant donnée une suite générique (x_n) de points fermés de X telle que la suite de mesures de probabilité $\left(\frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} \delta_{\text{pr}_v^*([x_n])} \right)$ converge faiblement vers une mesure probabilité μ sur X_v ,

$$\liminf_n \frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}}(x_n) \geq \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^2}{2\deg_L(X)} + \frac{1}{2} \deg_L(X) E\left(\mu - \frac{c_1(\overline{L})_v}{\deg_L(X)}\right).$$

Démonstration. Soient φ une fonction lisse sur X_v et $\overline{L}(\varphi)$ le faisceau inversible L muni de la métrique $||\cdot||e^{-\varphi}$ (continue et W^1 -régulière). La suite (x_n) étant générique,

$$\liminf_n \frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}(\varphi)}(x_n) \geq \frac{\widehat{c}_1(\overline{L}(\varphi))^2}{2\deg_L(X)}$$

en vertu de la discussion suivant le théorème 4.3.6. On a d'autre part

$$\frac{\widehat{c}_1(\overline{L}(\varphi))^2}{2\deg_L(X)} = \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^2}{2\deg_L(X)} + \frac{1}{2\deg_L(X)} \left(2 \int_{X_v} \varphi c_1(\overline{L})_v + \int_{X_v} \varphi \text{dd}^c \varphi \right)$$

et

$$\frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}(\varphi)}(x_n) = \frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}}(x_n) + \int_{X_v} \varphi \frac{\delta_{\text{pr}_v^*[x_n]}}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} ;$$

l'inégalité initiale s'écrit donc également sous la forme

$$\begin{aligned} \liminf_n \frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}}(x_n) \\ \geq \frac{\widehat{c}_1(\overline{L})^2}{2\deg_L(X)} + \frac{1}{2\deg_L(X)} \left(2 \int_{X_v} \varphi (c_1(\overline{L})_v - \deg_L(X)\mu) - \langle \varphi, \varphi \rangle_{\mathcal{D}} \right). \end{aligned}$$

La conclusion découle maintenant de la proposition 3.5.9, énoncée pour une place non archimédienne mais valable telle quelle pour la place archimédienne. \square

La mesure de probabilité $(\deg_L(X))^{-1} c_1(\overline{L})_v$ étant d'énergie finie (en toute place v de \mathbb{Q}) en vertu de la W^1 -régularité de la métrique sur L , une mesure de probabilité μ sur X_v est d'énergie finie si et seulement si tel est le cas pour la mesure de masse nulle

$$\mu - \frac{c_1(\overline{L})_v}{\deg_L(X)}.$$

COROLLAIRE 4.3.9. — *Soient L un faisceau inversible ample sur X muni d'une métrique continue et W^1 -régulière et (x_n) une suite générique de points fermés de X ; si*

$$\sup_n \frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} h_{\overline{L}}(x_n) < +\infty,$$

toutes les valeurs d'adhérence de la suite de mesures de probabilité

$$\left(\frac{1}{[\kappa(x_n) : \mathbb{Q}]} \delta_{\text{pr}_v^*[x_n]} \right)$$

sur X_v , $v \in M(\mathbb{Q})$, sont des mesures d'énergie finie.

4.3.4. Capacités arithmétiques.

Nous considérons maintenant le cas de métriques sous-harmoniques et levons l'hypothèse de continuité dans le théorème 4.3.5.

PROPOSITION 4.3.10. — *Pour tout faisceau inversible métrisé $\overline{L} = (L, \|\cdot\|)$ tel que L soit ample et la métrique $\|\cdot\|$ soit sous-harmonique et W^1 -régulière,*

$$\limsup_N \frac{2}{N^2} \chi(\overline{L}, N) \leq \widehat{c}_1(\overline{L})^2.$$

Démonstration. Le théorème 4.2.13 fournit une famille croissante $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in A}$ de métriques sous-harmoniques continues qui converge, ponctuellement et au sens W^1 , vers $\|\cdot\|$. Posant $\overline{L}_\alpha = (L, \|\cdot\|_\alpha)$,

$$\begin{aligned} \chi(\overline{L}, N) &= \frac{\lambda(B(\overline{L}, N))}{\lambda(H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A} / H^0(X, L^{\otimes N}))} \\ &\leq \frac{\lambda(B(\overline{L}_\alpha, N))}{\lambda(H^0(X, L^{\otimes N}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbf{A} / H^0(X, L^{\otimes N}))} = \chi(\overline{L}_\alpha, N) \end{aligned}$$

pour tout entier naturel N et tout $\alpha \in A$, donc

$$\limsup_N \frac{2}{N^2} \chi(\overline{L}, N) \leq \limsup_N \frac{2}{N^2} \chi(\overline{L}_\alpha, N) = \widehat{c}_1(\overline{L}_\alpha)^2$$

pour tout $\alpha \in A$ par application du théorème 4.4.1. La conclusion s'obtient en invoquant la convergence des $\widehat{c}_1(\overline{L}_\alpha)^2$ vers $\widehat{c}_1(\overline{L})^2$ (lemme 4.2.11). \square

Un *compact adélique* dans une courbe algébrique X propre et lisse sur \mathbb{Q} est la donnée d'une famille $E = (E_v)_{v \in M(\mathbb{Q})}$ de compacts non vides $E_v \subset X_v$ qui satisfait à la condition suivante :

il existe un ouvert non vide U de $\text{Spec}(\mathbb{Z})$ et une courbe propre \mathcal{X} sur U de fibre générique X tels que, pour toute place v de \mathbb{Q} correspondant à un point fermé de U , $\partial E_v \subset S_0(\mathcal{X}_v)$.

Un compact adélique est dit *non polaire* si, pour toute place $v \in M(\mathbb{Q})$, le compact E_v de X_v est non polaire.

Pour tout compact adélique non polaire E dans X et tout diviseur effectif et ample D sur X disjoint de E , la *métrique capacitaire* sur le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ est la métrique $(\|\cdot\|_E)$ telle que, pour toute place v de \mathbb{Q} , la fonction $-\log \|1_D\|_{E,v}$ soit le potentiel d'équilibre de $\text{pr}_v^* D$ dans $\Omega_v = X_v - E_v$ — c'est-à-dire la fonction sous-harmonique sur Ω_v , quasi-nulle sur E_v , harmonique sur $\Omega_v - |\text{pr}_v^* D|$ et telle que, pour toute équation f de $\text{pr}_v^* D$ sur un voisinage V de $|\text{pr}_v^* D|$ dans Ω_v , $-\log \|1_D\|_{E,v} + \log |f|_v$ se prolonge en une fonction harmonique sur V .

Cette métrique est sous-harmonique et bornée ; les hypothèses sur le compact adélique E garantissent qu'elle est W^1 -régulière.

Les métriques capacitaires sont naturellement majorées par des métriques sous-harmoniques continues obtenues en agrandissant le compact E . Ceci permet d'obtenir l'inégalité réciproque dans la proposition 4.3.10. L'énoncé suivant généralise le théorème principal de l'article [27].

THÉORÈME 4.3.11. — *Soient X une courbe algébrique propre et lisse sur \mathbb{Q} , D un diviseur effectif et ample sur X et E un compact adélique non polaire dans X , disjoint de D . Le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(D)$ étant muni de la métrique capacitaire $\|\cdot\|_E$,*

$$\chi((\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E), N) = \widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)^2 \frac{N^2}{2} + o(N^2).$$

Démonstration. Vu la proposition 4.3.10, il suffit de prouver l'inégalité

$$\liminf_N \frac{2}{N^2} \chi((\mathcal{O}_X(D)), \|\cdot\|_E), N) \geq \widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)^2.$$

Le compact adélique est l'intersection d'une suite décroissante (E_n) de compacts adéliques (disjoints de D) tels que la métrique sous-harmonique $\|\cdot\|_{E_n}$ soit *continue* : c'est en effet le cas pour chaque place v de \mathbb{Q} , le compact E_v étant l'intersection d'une suite décroissante de domaines \mathbb{Q}_v -analytiques compacts, et il n'y a qu'un ensemble fini de places $v \in M(\mathbb{Q})$ telles que $\|\cdot\|_{E,v}$ ne soit pas continue.

Considérons une telle suite (E_n) . Pour toute place $v \in M(\mathbb{Q})$, la fonction $-\log \|1_D\|_{E_n,v}$ s'annule identiquement sur $E_{n,v}$, donc sur E_v ; il découle donc du principe du maximum que la fonction $-\log \|1_D\|_{E_v} + \log \|1_D\|_{E_n,v}$ est positive et la métrique $\|\cdot\|_{E_n}$ majore ainsi la métrique $\|\cdot\|_E$. On en déduit l'inégalité

$$\chi((\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n}), N) \leq \chi((\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E), N)$$

pour tout entier naturel N , puis

$$\liminf_N \frac{2}{N^2} \chi((\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n}), N) \leq \liminf_N \frac{2}{N^2} \chi((\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E), N)$$

et, appliquant le théorème 4.3.5,

$$\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n})^2 \leq \liminf_N \frac{2}{N^2} \chi((\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E), N)$$

La conclusion s'obtient en utilisant la convergence de la suite $(\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n})^2)$ vers $\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)^2$, laquelle fait l'objet du lemme suivant. \square

LEMME 4.3.12. — *Les notations étant celles de la démonstration qui précède, la suite $(\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n})^2)$ converge vers $\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)^2$.*

Démonstration. La fonction $-\log \|1_D\|_E$ est la régularisée semi-continue supérieurement de l'enveloppe supérieure g de la suite croissante $(-\log \|1_D\|_{E_n})$ et, pour toute place v de \mathbb{Q} , l'ensemble $\{g_v < -\log \|1_D\|_{E,v}\}$ est une partie polaire de X_v contenue dans E_v (théorème 3.6.15 pour v non archimédienne, théorème 3.1 de [11] pour $v = \infty$). C'est l'ensemble vide pour presque toute place v vu la définition des compacts adéliques.

Étant donnée une fonction méromorphe régulière f sur X telle que le support du diviseur de la section méromorphe $f1_D$ de $\mathcal{O}_X(D)$ soit disjoint de $|D|$,

$$\begin{aligned} \widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n})^2 &= \int_X (-\log \|f1_D\|_{E_n}) \star (-\log \|1_D\|_{E_n}) \\ &= \int_X (-\log \|f1_D\|_{E_n}) \delta_D + \int_X (-\log \|1_D\|_{E_n}) c_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n}) \\ &= \int_X (-\log \|f1_D\|_{E_n}) \delta_D \end{aligned}$$

pour tout n car $-\log \|1_D\|_{E_n}$ s'annule identiquement sur E_n . D'un autre côté, la mesure $c_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)$ est d'énergie finie en vertu de la non polarité de E ; elle ne charge par conséquent aucune partie polaire de E (théorème 3.5.11) pour une place non archimédienne, théorème A.3.1 de l'article [11] pour la place archimédienne). Il en découle les égalités

$$\begin{aligned} \widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)^2 &= \int_X (-\log \|f1_D\|_E) \star (-\log \|1_D\|_E) \\ &= \int_X (-\log \|f1_D\|_E) \delta_D + \int_X (-\log \|1_D\|_E) c_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E) \\ &= \int_X (-\log \|f1_D\|_E) \delta_D \end{aligned}$$

car la fonction $-\log \|1_D\|_E$ est nulle, sur E , en dehors d'une partie polaire.

La conclusion est maintenant évidente : puisque $-\log \|1_D\|_E$ est la limite ponctuelle des $-\log \|1_D\|_{E_n}$ au voisinage du support de D , la suite des

$$\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_{E_n})^2 = \int_X (-\log \|f1_D\|_{E_n}) \delta_D$$

converge vers

$$\widehat{c}_1(\mathcal{O}_X(D), \|\cdot\|_E)^2 = \int_X (-\log \|1_D\|_E) \delta_D.$$

\square

5. ANNEXE : COMPARAISON AVEC D'AUTRES APPROCHES

5.1. Comparaison avec l'approche de R. Rumely

Le livre [26] présente une théorie du potentiel sur les courbes analytiques non archimédiennes, développée selon les lignes suivantes (voir [27] pour un résumé).

Soit k un corps algébriquement clos et complet pour une valeur absolue non archimédienne non triviale et considérons une courbe algébrique X , connexe, propre et lisse sur k . L'ensemble $X_1 = X(k)$ des points de X à valeur dans k est muni d'une topologie naturelle raffinant la topologie de Zariski : un système fondamental de voisinages d'un point $x \in X_1$ est formé des parties de la forme $U_1 \cap B$, où U est un voisinage affine de x dans X , vu comme un sous-schéma fermé d'un espace affine \mathbb{A}_k^n , et B est une boule centrée en x dans l'espace (ultra)métrique $(\mathbb{A}^n(k), d)$, d étant la distance définie par

$$d(p, q) = \max_{1 \leq i \leq n} |T_i(p) - T_i(q)|.$$

Soit X^a l'espace strictement k -analytique associé à la courbe algébrique X (au sens de Berkovich) ; X_1 est l'ensemble des points de type (1) de X^a – noté $P(X)$ dans les pages qui précèdent – et la topologie dont on vient de le munir est celle induite par la topologie de X^a ; en particulier, les parties compactes E de X_1 sont les parties compactes de X^a contenues dans X_1 .

Soient ζ un point dans X_1 et t un élément non nul de $(\Omega_X^1)^\vee[\zeta]$.

Une *lemniscate polynomiale* relative à ζ (abrégée en « domaine PL_ζ ») est une partie de X_1 de la forme $\{|f| \leq 1\}$, $f : X \rightarrow \mathbb{P}_k^1$ étant une fonction méromorphe telle que $f^{-1}(\{\infty\}) = \{\zeta\}$.

La *fonction de Green* d'un domaine PL_ζ $V = \{|f| \leq 1\}$ est définie par :

$$G(., \zeta; V) = \begin{cases} \frac{1}{\deg(f)} \log|f| & \text{sur } X_1 - V \\ 0 & \text{sur } V \end{cases}$$

et ne dépend pas du choix de f .

Le sous-ensemble V de X^a est un domaine strictement k -affinoïde et la fonction $G(., \zeta; V)$ est la restriction à X_1 du potentiel d'équilibre $g_{\zeta, V}$ de ζ dans $X^a - V$ (3.6.15).

La *capacité* $\gamma_{\zeta, t}(V)$ d'un domaine PL_ζ est le nombre réel strictement positif défini par la formule

$$G(., \zeta; V) + \log |z| = -\log \gamma_{\zeta, t}(V) + o(1)$$

où z est un paramètre local en ζ normalisé de telle sorte que $|\langle dz, t \rangle| = 1$.

Reprenant les notations de 3.6.2,

$$\gamma_{\zeta, t}(V) = \|t\|_V^c.$$

Étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset X_1 - \{\zeta\}$, on définit alors :

– la capacité extérieure de E et sa fonction de Green (relative à ζ) par les formules

$$\gamma_{\zeta, t}(E) = \inf_V \gamma_{\zeta, t}(V),$$

$$G(., \zeta; E) = \sup_V G(., \zeta; V),$$

V parcourant l'ensemble des domaines PL_ζ contenant E ;

– la capacité intérieure de E

$$\underline{\gamma}_{\zeta,t}(E) = \sup_K \gamma_{\zeta,t}(K),$$

K parcourant les domaines PL_{ζ} contenus dans E .

Une partie E de $X_1 - \{\zeta\}$ est *algébriquement capacitable* (relativement à ζ) si

$$\gamma_{\zeta,t}(E) = \underline{\gamma}_{\zeta,t}(E).$$

Une observation s'impose à ce stade. Les domaines PL_{ζ} sont la trace sur X_1 de domaines strictement k -affinoïdes de X^a . S'il est clair que tous les domaines strictement k -affinoïdes $V \subset X^a$ ne sont pas de la forme $\{|f| \leq 1\}$, f étant une fonction méromorphe régulière sur X dont les pôles sont concentrés en ζ , ceux-ci ne constituent même pas en général un système fondamental de voisinages des points de X_1 .

Par exemple : étant donnée une courbe elliptique \mathcal{E}/S et un point $\tilde{x} \in \mathcal{E}_s(\tilde{k})$, l'ouvert $r^{-1}(\tilde{x})$ de \mathcal{E}_{η} ne contient aucun domaine PL_e – e étant l'élément neutre du groupe $\mathcal{E}(k)$ – si \tilde{x} n'est pas un élément de *torsion* dans le groupe $\mathcal{E}(\tilde{k})$ (c'est une obstruction analogue à celle rencontrée au paragraphe 2.3.4).

Toutefois, en se restreignant à un corps k qui est la complétion d'une clôture algébrique d'un corps non archimédien localement compact (en clair, la complétion d'une clôture algébrique de \mathbb{Q}_p ou $\mathbb{F}_p((T))$), on peut montrer le résultat suivant (par exemple à partir du « Jacobian construction principle » de [26]).

LEMME 5.1.1. — *Soit Y un domaine strictement k -affinoïde dans $X^a - \{\zeta\}$ et soit Ω la composante connexe de ζ dans $X^a - Y$; il existe une fonction méromorphe régulière f sur X telle que*

$$X^a - \Omega = \{|f| \leq 1\}.$$

On en déduit aisément les faits suivants :

- les domaines PL_{ζ} forment un système fondamental de voisinages de chaque point de X_1 ;
- $X_1 - \{\zeta\}$ est la réunion d'une famille (suite) croissante de domaines PL_{ζ} .

Nous supposons maintenant que le corps k est la complétion de la clôture algébrique d'un corps non archimédien localement compact.

Rappelons que nous avons introduit une capacité (au sens de Choquet)

$$\text{Cap}_{\zeta,t} : \mathcal{P}(X^a - \{\zeta\}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}$$

à la fin du paragraphe 3.6.2 (théorème 3.6.20), où $\mathcal{P}(X^a - \{\zeta\})$ désigne l'ensemble des parties de $X^a - \{\zeta\}$. La capacité intérieure $\text{Cap}_{\zeta,t}^i$ associée à $\text{Cap}_{\zeta,t}$ est définie par la formule :

$$\text{Cap}_{\zeta,t}^i(E) = \sup \{ \text{Cap}_{\zeta,t}(K) ; K \subset E, K \text{ compact} \}.$$

THÉORÈME 5.1.2. —

(i) *Soient $Y \subset X^a - \{\zeta\}$ un domaine strictement k -affinoïde et Ω la composante connexe de ζ dans $X^a - \{\zeta\}$; $Y' = X^a - \Omega$ est un domaine strictement k -affinoïde, $V = X_1 \cap (X - \Omega)$ est un domaine PL_{ζ} et*

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(Y) = \text{Cap}_{\zeta,t}(Y') = \gamma_{\zeta,t}(V).$$

(ii) *Quel que soit le sous-ensemble $E \subset X_1 - \{\zeta\}$,*

$$\underline{\gamma}_{\zeta,t}(E) = \text{Cap}_{\zeta,t}^i(E).$$

(iii) Quel que soit le sous-ensemble E de $X_1 - \{\zeta\}$,

$$\gamma_{\zeta,t}(E) = \text{Cap}_{\zeta,t}(\overline{E}),$$

où \overline{E} est l'adhérence de E dans $X^a - \{\zeta\}$.

En particulier, une partie E de $X_1 - \{\zeta\}$ est algébriquement capacitable si et seulement si

$$\text{Cap}_{\zeta,t}^i(E) = \text{Cap}_{\zeta,t}(\overline{E}).$$

Démonstration.

(i) Il suffit de démontrer l'égalité

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(Y) = \text{Cap}_{\zeta,t}(Y').$$

L'inégalité

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(Y) \leq \text{Cap}_{\zeta,t}(Y')$$

découle trivialement de la croissance de $\text{Cap}_{\zeta,t}$ puisque $Y \subset Y'$; on obtient l'inégalité réciproque en observant que les potentiels d'équilibre de ζ dans $X^a - Y$ et $X^a - Y' = \Omega$ coïncident.

(ii) Soit $K \subset X_1 - \{\zeta\}$ un compact; l'inégalité

$$\gamma_{\zeta,t}(K) \geq \text{Cap}_{\zeta,t}(K)$$

découle trivialement de la croissance de $\text{Cap}_{\zeta,t}$:

$$\gamma_{\zeta,t}(K) = \inf_V \gamma_{\zeta,t}(V) = \inf_V \text{Cap}_{\zeta,t}(V) \geq \text{Cap}_{\zeta,t}(K).$$

Puisque K est un compact de X^a , c'est l'intersection d'une suite décroissante de domaines strictement k -affinoïdes $Y_n \subset X^a$ et

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(K) = \inf_n \text{Cap}_{\zeta,t}(Y_n)$$

(proposition 3.6.5); notant V_n le domaine PL_{ζ} associé à V_n au point (i), on a donc

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(K) = \inf_n \gamma_{\zeta,t}(V_n) \geq \gamma_{\zeta,t}(K).$$

(iii) Soit E une partie de $X_1 - \{\zeta\}$. Si ζ appartient à \overline{E} , les deux membres de l'égalité sont égaux à $+\infty$; on peut donc supposer que \overline{E} est un compact de $X^a - \{\zeta\}$.

Soit $Y \subset X - \{\zeta\}$ un domaine strictement k -affinoïde tel que $V = Y \cap X_1$ soit un domaine PL_{ζ} contenant E ; Y étant l'adhérence de V dans X^a , $\overline{E} \subset Y$,

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(\overline{E}) \leq \text{Cap}_{\zeta,t}(Y) = \gamma_{\zeta,t}(V)$$

et donc

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(\overline{E}) \leq \gamma_{\zeta,t}(E).$$

L'inégalité réciproque découle de ce que la capacité du compact \overline{E} de $X - \{\zeta\}$ est la borne inférieure des capacités $\text{Cap}_{\zeta,t}(Y)$, Y parcourant l'ensemble des domaines strictement k -affinoïdes contenant \overline{E} ; étant donné un tel Y , le complémentaire Y' de la composante connexe de ζ dans $X^a - Y$ est un domaine strictement k -affinoïde de X^a tel que $Y' \cap X_1$ soit un domaine PL_{ζ} contenant E et

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(Y) = \text{Cap}_{\zeta,t}(Y') = \gamma_{\zeta,t}(Y' \cap X_1) \geq \gamma_{\zeta,t}(E).$$

□

Remarque 5.1.3. — On peut reprendre certains points du chapitre 4.3 de [26] à la lumière du point (iii) du théorème précédent.

- Le principe 4.3.5 traduit une propriété topologique des courbes strictement k -analytiques : quelle que soit la S -courbe \mathcal{X} , l'adhérence dans \mathcal{X}_η d'une partie E rencontrant une infinité d'ouverts $r^{-1}(\tilde{x})$, \tilde{x} parcourant l'ensemble des points fermés de \mathcal{X}_s , contient au moins un point de $S_0(\mathcal{X})$. On a alors

$$\text{Cap}_{\zeta,t}(\overline{E}) \geq \min_{x \in S_0(\mathcal{X})} \text{Cap}_{\zeta,t}(\{x\}).$$

Le principe 4.3.6 exprime simplement que les ouverts $r^{-1}(\tilde{x})$ sont les composantes connexes de $\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$.

- Le théorème 4.3.3, selon lequel les *lemniscates rationnelles* (= intersections finies de domaines PL_ζ , ζ variant dans X_1) sont algébriquement capacitables, est un cas particulier de la proposition 3.6.29 puisque ce sont l'intersection de X_1 avec des domaines strictement k -affinoides de X^a . Le théorème 4.3.13, selon lequel les réunions et intersections finies de compacts de X_1 et de *lemniscates rationnelles* (= intersections finies de domaines PL_ζ , ζ variant dans X_1) sont algébriquement capacitables, s'en déduit immédiatement puisque

$$\text{Cap}_{\zeta,t}^i(K \cup (V \cap X_1)) = \text{Cap}_{\zeta,t}^i(K \cup V) = \text{Cap}_{\zeta,t}(K \cup V).$$

Étant donné d'un point $\zeta \in X_1$ et d'un élément non nul t dans $(\Omega_X^1)^\vee[\zeta]$, R. Rumely introduit dans [26] une fonction symétrique et continue

$$[\cdot, \cdot]_\zeta : X_1 \times X_1 \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\},$$

appelée « distance canonique », qu'il utilise pour associer un potentiel $u_\nu(\cdot, \zeta)$ à toute mesure positive ν supportée par un compact $E \subset X_1 - \{\zeta\}$:

$$u_\nu(x, \zeta) = \int_E (-\log[x, y]_\zeta) \, d\nu(y)$$

($x \in X_1 - \{\zeta\}$). On peut trouver plusieurs constructions et caractérisations axiomatiques de cette fonction dans [26], entre autres celle-ci ([26], Theorem 2.1.1).

THÉORÈME 5.1.4. — *La fonction $[\cdot, \cdot]_\zeta$ sur $X_1 \times X_1$ vérifie les propriétés suivantes, qui la caractérisent uniquement.*

- Elle est continue.
- Quelle que soit la fonction méromorphe régulière f sur X , il existe un nombre réel $C(f)$ tel que

$$|f| = C(f) \prod_{x \in X_1 - \{\zeta\}} [\cdot, x]_\zeta^{\text{ord}_x f}.$$

- Quels que soient le point $x \in X_1 - \{\zeta\}$ et le paramètre local z au voisinage de ζ tel que $\langle dz(\zeta), t \rangle = 1$,

$$[z, x]_\zeta = |z|^{-1} + o(|z|^{-1})$$

au voisinage de ζ .

En vertu de la densité de X_1 dans l'espace topologique $|X^a|$, il existe au plus une fonction continue

$$g_\zeta : |X^a| \times |X^a| \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

dont la restriction à $X_1 \times X_1$ coïncide avec $-\log[\cdot, \cdot]_\zeta$; expliquons brièvement comment le définir.

Étant donné un point x dans X^a , tout courant T de degré 0 sur X^a , solution de l'équation

$$\text{dd}^c T = \delta_x - \delta_\zeta,$$

admet un unique prolongement continu $|X^a| \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et l'ensemble des ces fonctions est un espace affine sous \mathbb{R} ; on note g_x la solution continue de cette équation telle que

$$g_x = -\log |z| + o(1)$$

au voisinage de ζ , z étant une équation locale en ζ telle que $\langle dz(\zeta), t \rangle = 1$.

THÉORÈME 5.1.5. — *La fonction*

$$g : |X^a| \times |X^a| \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \quad (x, y) \mapsto g_x(y)$$

est symétrique, continue et induit $-\log[.,.]_\zeta$ sur $X_1 \times X_1$.

Démonstration. Observons tout d'abord que si les deux premières assertions sont acquises, la dernière est une conséquence immédiate de la formule de Poincaré-Lelong (3.3.15).

Il y a plusieurs manières d'établir la symétrie et la continuité de g ; en voici une, prolongeant les considérations du paragraphe 2.4 de [26]. Soient \mathcal{X} un modèle simplement semi-stable de X (il en existe puisque k est algébriquement clos), $S(\mathcal{X})$ son squelette et $\tau : X^a \rightarrow S(\mathcal{X})$ l'application de rétraction ; notons G la restriction de g au sous-espace fermé $S \times S$ de $|X^a| \times |X^a|$ et observons qu'elle prend des valeurs finies puisque S est un sous-ensemble de $I(X^a)$. Nous désignerons par Ω_x la composante connexe d'un point x dans $X^a - S(\mathcal{X})$ et rappelons enfin que chaque composante connexe de l'ouvert $X^a - S(\mathcal{X})$ a un unique point frontière, appartenant à $S(\mathcal{X})$; toutes sont isomorphes au disque ouvert $D(0, 1)$.

Soit x un point dans $S(\mathcal{X})$. La fonction g_x étant, par construction, harmonique sur $X^a - \{\zeta, x\}$, elle est constante sur chaque composante connexe de $X^a - S(\mathcal{X})$ disjointe de ζ ; la fonction $g_x - G(x, \tau(\cdot))$ est par conséquent identiquement nulle sur le complémentaire de Ω et coïncide donc avec le potentiel d'équilibre $g_{\zeta, S(\mathcal{X})}$ de ζ dans $X^a - S(\mathcal{X})$:

$$g_x = G(x, \tau(\cdot)) + g_{\zeta, S(\mathcal{X})}.$$

Considérons maintenant un point $x \in X^a - (\{\zeta\} \cup S(\mathcal{X}))$; la fonction $g_{\tau(x)} - g_x$, vérifiant l'équation

$$\mathrm{dd}^c(g_{\tau(x)} - g_x) = \delta_{\tau(x)} - \delta_x,$$

diffère du potentiel d'équilibre $g_{x, S(\mathcal{X})}$ de x dans $S(\mathcal{X})$ d'une constante. Étant donné la normalisation de g_x et $g_{\tau(x)}$ au voisinage de ζ , $g_{\tau(x)} - g(x)$ s'annule au point ζ ; on a donc

$$g_{\tau(x)} - g_x = g_{x, S(\mathcal{X})} - g_{x, S(\mathcal{X})}(\zeta).$$

Observons maintenant que, pour tous points $x, y \in X^a - S(\mathcal{X})$,

$$g_{x, S(\mathcal{X})}(y) = g_{y, S(\mathcal{X})}(x) ;$$

les deux termes sont égaux à $+\infty$ si $x = y$ et

$$g_{x, S(\mathcal{X})}(y) = \int_{X^a} g_{x, S(\mathcal{X})} \mathrm{dd}^c g_{y, S(\mathcal{X})} = \int_{X^a} g_{y, S(\mathcal{X})} \mathrm{dd}^c g_{x, S(\mathcal{X})} = g_{y, S(\mathcal{X})}(y)$$

si $x \neq y$. En particulier,

$$g_{x, S(\mathcal{X})}(\zeta) = g_{\zeta, S(\mathcal{X})}(x).$$

En convenant de prolonger la définition des potentiels d'équilibre en posant $g_{x, S(\mathcal{X})} = 0$ si $x \in S(\mathcal{X})$, nous pouvons résumer l'analyse précédente en la formule :

$$g(x, y) = G(\tau(x), \tau(y)) + g_{\zeta, S(\mathcal{X})}(\zeta) + g_{\zeta, S(\mathcal{X})}(y) - g_{S(\mathcal{X})}(x, y),$$

où l'on a posé

$$g_{S(\mathcal{X})}(x, y) = g_{x, S(\mathcal{X})}(y) = g_{y, S(\mathcal{X})}(x).$$

La fonction symétrique $g_{S(\mathcal{X})} : |X^a| \times |X^a| \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est continue : en effet, elle s'annule identiquement sur $S(\mathcal{X}) \times |X^a| \cup |X^a| \times S(\mathcal{X})$ et chaque composante connexe $\Omega \times \Omega'$ de $|X^a - S(\mathcal{X})| \times : |X^a - S(\mathcal{X})|$ si Ω et Ω' sont des composantes distinctes de $|X^a| - S(\mathcal{X})$; il reste à vérifier qu'elle est continue sur $\Omega \times \Omega$, ce qui est immédiat : étant donné un isomorphisme $j : \Omega \xrightarrow{\sim} D(0, 1)$, la restriction de $g_{S(\mathcal{X})}$ à $\Omega \times \Omega$ est la fonction $(j \times j)^*(-\log |T_1 - T_2|)$.

Étant donnés deux points $x, y \in S(\mathcal{X})$, la fonction $g_x - g_y$ est harmonique sur $X^a - \{x, y\}$ et donc constante sur chaque composante connexe de $X^a - S(\mathcal{X})$; on a donc $(g_x - g_y)(\tau(\zeta)) = (g_x - g_y)(\zeta) = 0$ en vertu de la normalisation au voisinage de ζ , soit encore

$$G(x, \tau(\zeta)) = G(y, \tau(\zeta)).$$

Nous venons de réduire le théorème au lemme suivant, ce qui en achève la démonstration.

□

LEMME 5.1.6. — *Quels que soient le polyèdre entier connexe S , le point $\zeta \in S$ et le nombre réel C , la fonction G sur $S \times S$ telle que, pour tout point $x \in S(\mathcal{X})$,*

$$\begin{cases} \mathrm{dd}^c G(x, \cdot) = \delta_x - \delta_\zeta \\ G(x, \zeta) = C, \end{cases}$$

est symétrique et continue.

Démonstration. C'est bien connu ; voir par exemple [13] ou [32] (Theorem a.7 et (3.1)). □

La formulation de la géométrie d'Arakelov des courbes développée au chapitre 4 s'inspire des idées introduites par R. Rumely dans [28], article dans lequel se trouve déjà une présentation unifiant la théorie d'Arakelov classique et la théorie des capacités arithmétiques. Les fonctions de Green lisses y sont définies à partir des *graphes de réduction* de modèles entiers « bien ajustés », graphes métrisés essentiellement équivalents aux squelettes des courbes simplement semi-stables.

Rappelons tout d'abord brièvement ce que sont les modèles bien ajustés et les graphes de réduction de [28]. Soient X une courbe algébrique propre et lisse sur \mathbb{Q}_p et K une extension finie de \mathbb{Q}_p , d'anneau des entiers \mathcal{O}_K ; un modèle entier $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ de $X \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ est dit *bien ajusté* s'il satisfait aux conditions suivantes :

- (i) \mathcal{X} est un schéma régulier ;
- (ii) la courbe $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ est simplement semi-stable ;
- (iii) les composantes irréductibles de la fibre spéciale \mathcal{X}_s sont géométriquement connexes et ses points singuliers sont rationnels ;
- (iv) deux composantes irréductibles distinctes de \mathcal{X}_s ont au plus un point d'intersection.

Il existe toujours une extension finie K de \mathbb{Q}_p sur laquelle X admet un modèle entier bien ajusté. Si, d'autre part, $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ est un modèle bien ajusté de $X \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et L est une extension finie de K , d'indice de ramification $e(L/K)$, on obtient un modèle bien ajusté de $X \otimes_{\mathbb{Q}_p} L$ par l'éclatement d'un idéal convenable sur $\mathcal{X} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_L$, ayant pour effet de remplacer chaque point singulier par une chaîne de $e - 1$ copies de \mathbb{P}_L^1 .

Étant donnés une extension finie K de \mathbb{Q}_p et un modèle bien ajusté $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ de $X \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$, le *graphe de réduction* $R(\mathcal{X})$ est le graphe dual de la fibre spéciale \mathcal{X}_s , linéairement métrisé de telle sorte que chaque arête soit de longueur $1/e(K/\mathbb{Q}_p)$.

Considérant toujours un modèle bien ajusté $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$, le squelette $S(\mathcal{X})$ de la $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ -courbe simplement semi-stable obtenue en complétant \mathcal{X} le long de sa fibre spéciale a le même polyèdre sous-jacent que $R(\mathcal{X})$. La structure entière naturelle sur $S(\mathcal{X})$ détermine de manière évidente une autre structure métrique linéaire, caractérisée comme suit : une arête,

correspondant à un point singulier \tilde{x} , a pour groupe structural

$$(\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}t_1 \oplus t_2)/\mathbb{Z}(t_1 + t_2 + \log |a|),$$

où a est un élément de \mathcal{O}_K tel que la fibre spéciale \mathcal{X}_s admette une équation de la forme $x_1x_2 - a = 0$ au voisinage de \tilde{x} , x_1, x_2 étant des paramètres locaux en ce point ; la régularité de \mathcal{X} implique que a soit un générateur de l'idéal maximal de \mathcal{O}_K et cette arête est de longueur

$$-\log |a| = \frac{1}{e(K/\mathbb{Q}_p)} \log p.$$

Lorsqu'on est convenu d'orienter les graphes métrisés $R(\mathcal{X})$ et $S(\mathcal{X})$ de telle sorte qu'en chaque point les arêtes soient « sortantes », on dispose de laplaciens Δ_R et Δ_S , définis sur l'espace des fonctions réelles continues et affines par morceaux $A^0(S(\mathcal{X}))$ et à valeurs dans l'espace de mesures $A^1(S(\mathcal{X}))$. La première égalité de la formule

$$dd^c = \Delta_S = (\log p)^{-1} \Delta_R,$$

où dd^c est l'opérateur défini au chapitre 1, relativement au poids trivial sur $S(\mathcal{X})$, découle immédiatement des définitions et de la rationalité des points singuliers de \mathcal{X} (condition (iii)) ; la seconde est évidente.

Une fonction réelle φ sur X^{an} est lisse au sens du chapitre 2 si et seulement s'il existe une extension finie K de \mathbb{Q}_p , un modèle bien ajusté $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ de $X \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et une fonction réelle continue et affine par morceaux Φ sur $S(\mathcal{X})$ telle que

$$\varphi \otimes 1 = \Phi \circ \tau_{\mathcal{X}}.$$

On trouve dans [28] une notion de *fonction lisse* essentiellement équivalente à celle introduite au chapitre 2 : notant \mathbb{C}_p la complétion d'une clôture algébrique \mathbb{Q}_p^a de \mathbb{Q}_p , une fonction réelle φ sur $X(\mathbb{C}_p)$ est *lisse* au sens de Rumely s'il existe une extension finie K de \mathbb{Q}_p , un modèle bien ajusté $\mathcal{X}/\mathcal{O}_K$ de $X \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ et une fonction continue affine par morceaux sur $S(\mathcal{X})$ tels que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X(\mathbb{C}_p) & & \\ \downarrow & \searrow \varphi & \\ X^{an} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K & \xrightarrow{\Phi \circ \tau_{\mathcal{X}}} & \mathbb{R} \end{array}$$

soit commutatif, où $\tau_{\mathcal{X}}$ est la rétraction de $X^{an} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ sur $S(\mathcal{X})$ et $X(\mathbb{C}_p) \rightarrow X^{an} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$ est l'application canonique. On constate ainsi que l'opération de restriction au sous-ensemble

$$X_1^{an} = X(\mathbb{C}_p)^{\text{Gal}(\mathbb{Q}_p^a/\mathbb{Q}_p)}$$

des points de type (1) de X^{an} induit un isomorphisme de l'espace vectoriel $A^0(X^{an})$ des fonctions lisses sur X^{an} , au sens du chapitre 2, sur l'espace des fonctions lisses $\text{Gal}(\mathbb{Q}_p^a/\mathbb{Q}_p)$ -invariantes au sens de [28]. Le laplacien Δ_R est utilisé dans [28] pour définir un opérateur dd_R^c (noté dd^c dans [28]) sur l'espace des fonctions lisses. La comparaison avec l'opérateur dd^c (à travers l'isomorphisme précédent) est contenue dans la formule suivante :

$$dd^c = (\log p)^{-1} dd_R^c.$$

Soit D un diviseur sur X ; les fonctions de Green lisses associées à D dans l'article [28] sont les fonctions réelles

$$g' : (X - |D|)(\mathbb{C}_p) \rightarrow \mathbb{R}$$

obtenues par restriction des fonctions $(\log p)^{-1}g$, g étant une fonction de Green lisse pour D au sens du chapitre 4. La différence de normalisation est compensée, dans [28], par le facteur

$\log p$ apparaissant dans la définition de l'accouplement d'intersection, lequel coïncide avec l'accouplement défini avant la proposition 4.1.4.

5.2. Comparaison avec l'approche de R. Rumely et M. Baker

Dans l'article [29], R. Rumely et M. Baker développent la théorie du potentiel sur $\mathbb{P}_k^1 = \mathbb{A}_k^1 \cup \{\infty\}$ en introduisant un noyau, dit « noyau de Hsia », leur permettant d'associer un potentiel à toute mesure ; c'est le prolongement naturel du point de vue adopté dans [26].

Le noyau de Hsia δ_∞ peut être caractérisé comme l'unique fonction continue

$$|\mathbb{P}_k^1| \times |\mathbb{P}_k^1| \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

prolongeant la fonction

$$\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad (x, y) \mapsto |x - y|$$

(k est algébriquement clos). Ce prolongement est construit dans [29] à partir de familles de disques emboîtés.

L'application δ_∞ apparaît comme un cas particulier des considérations du paragraphe précédent : notant en effet g la fonction continue

$$|\mathbb{P}_k^1| \times |\mathbb{P}_k^1| \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

associée par le théorème 5.1.5 au point $\infty \in \mathbb{P}^1(k)$ et à l'élément $\infty^* \frac{\partial}{\partial T_1^{-1}}$ de $(\Omega_{\mathbb{P}_k^1, a}^1)^\vee[\infty]$ (T_1 est la coordonnée sur $\mathbb{A}_k^1 = \text{Spec}(k[T_1])$),

$$\delta_\infty = e^{-g}$$

car g induit $-\log |x - y|$ sur $\mathbb{A}^1(k) \times \mathbb{A}^1(k)$.

5.3. Comparaison avec l'approche de E. Kani

Étant donné un corps complet pour une valuation discrète k et une $\text{Spf}(k^\circ)$ -courbe \mathcal{X} (génériquement lisse) dont le schéma sous-jacent est normal, E. Kani explique dans l'article [18] comment interpréter la théorie de l'intersection sur \mathcal{X} en termes « potentialistes » et en déduit une formulation rigide-analytique (au sens de Tate) des résultats de [26] pour les sous-ensembles de $X(k^a)$ qui sont des domaines (strictement) affinoïdes (capacités, fonction de Green) ou, de manière équivalente, pour les mesures sur $X(k^a)$ induites, via le plongement $X(k^a) \hookrightarrow X^a$, par les éléments de $\mathbb{A}^1(X^a)$ – c'est-à-dire, essentiellement, les mesures de Dirac δ_x associées aux points de $\mathbf{I}(X)$ (ce sont les « mesures admissibles » de [18]).

Les « théories du potentiel » sur $X(k^a)$ que Kani considère sont les objets d'algèbre linéaire que les fonctions harmoniques définissent lorsqu'on les restreint à des squelettes. Il est d'ailleurs explicitement noté dans [18] que le théorème de réduction semi-stable de Bosch et Lütkebohmert ([9]) permet d'étendre la construction des « théories du potentiel local » au cas d'un corps de base non archimédien quelconque (cf. p.517).

Nous avons utilisé l'équivalence entre la théorie de l'intersection sur \mathcal{X} et la théorie du potentiel sur $\mathcal{X}_\eta - S_0(\mathcal{X})$ (potentiels et mesures d'équilibre), sans l'expliciter complètement, dans la discussion des diviseurs d'Arakelov lisses et de leurs produit au chapitre 4.

5.4. Comparaison avec l'approche de C. Favre et M. Jonsson

C. Favre et M. Jonsson étudient dans [16] les valuations de rang un sur un anneau local régulier complet R , d'égale caractéristique, à corps résiduel algébriquement clos k et de dimension 2. Écrivant R sous la forme $k[[x, y]]$, ils introduisent pour ce faire l'ensemble \mathcal{V} des valuations $v : R \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ telles que $\min(v(x), v(y)) = 1$ et le munissent d'une structure naturelle d'« arbre réel paramétré » (« arbre des valuations »). Cet espace possède également une topologie \mathcal{T}_0 plus grossière que sa topologie d'arbre, appelée « topologie faible » dans [16], pour laquelle il est localement compact ; les auteurs montrent que la théorie de la mesure sur $(\mathcal{V}, \mathcal{T}_0)$ est un outil d'analyse puissant des idéaux de R (ainsi que des germes de fonctions sous-harmoniques sur $(\mathbb{C}^2, 0)$ lorsque $k = \mathbb{C}$).

Étant donné un arbre réel paramétré T , muni de sa topologie faible, Favre et Jonsson étudient systématiquement les mesures boréliennes complexes sur T , s'inspirant pour ce faire de la correspondance classique, sur \mathbb{R} , entre mesures positives et fonctions convexes croissantes. Nous renonçons à donner des définitions précises, renvoyant pour cela à [16], et nous contenterons de dire qu'ils introduisent un espace \mathcal{P} de fonctions complexes sur (une partie de) T ainsi qu'un laplacien $\Delta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$, \mathcal{M} désignant l'espace des mesures boréliennes complexes sur T . Il convient d'observer que Δ est défini comme l'inverse d'un isomorphisme naturel – et explicite – $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{P}$, dont la construction fait intervenir des fonctions de répartition pour les éléments de \mathcal{M} .

Précisons enfin que les mesures boréliennes coïncident avec les mesures de Radon sur l'espace topologique localement compact (T, \mathcal{T}_0) .

Les considérations du chapitre 3 montrent que les mesures sur un arbre réel s'étudient très naturellement dans le cadre d'une *théorie des distributions*. Vu le caractère élémentaire de la construction, les indications qui suivent devraient suffir. Nous considérons ici un arbre réel paramétré (complet) T et l'on désigne par T^0 le complémentaire de ses points extrémaux.

- Une fonction (complexe) φ sur T est *lisse* si elle est de la forme $\Phi \circ \tau$, où τ est la rétraction de T sur un sous-arbre *fini* T' de T et Φ est une fonction (continue) affine par morceaux sur T' . Les fonctions lisses sont continues pour la topologie faible de T (celle-ci est, en fait, la topologie définie par les fonctions lisses) et forment un espace vectoriel $A^0(T)$ dense dans celui des fonctions sur T , muni de la topologie de la convergence uniforme (la démonstration de la proposition 3.2.7 est valable dans ce contexte).
- Notant $A^1(T)$ le sous-espace vectoriel de \mathcal{M} engendré par les mesures de Dirac δ_x , $x \in T^0$, on définit trivialement un opérateur linéaire $dd^c T : A^0(X) \rightarrow A^1(X)$ à partir du laplacien discret sur les arbres finis métrisés. Les métriques sont fournies par la paramétrisation de T .
- La formule de symétrie

$$\int_T \varphi \, dd^c \psi = \int_T \psi \, dd^c \varphi$$

$\varphi, \psi \in A^0(T)$, découle directement de la formule analogue sur un arbre fini métrisé.

- L'espace vectoriel $D^0(T)$ des fonctions sur T^0 est naturellement le dual de $A^1(X)$; en vertu de la formule précédent, on peut donc prolonger dd^c à tout $D^0(T)$ comme opérateur à valeurs dans l'espace vectoriel $D^1(T) = A^0(T)^\vee$.
- Le contenu du chapitre 3 se transcrit tel quel (en particulier les considérations sur l'énergie).

Remarque 5.4.1. — Lorsque T est un arbre *fini*, la théorie que l'on vient de décrire coïncide bien entendu avec celle du paragraphe 1.2.5.

L'espace vectoriel \mathcal{P} des « potentiels complexes », défini dans [16] (7.6), est un sous-espace de $D^0(T) = \text{Hom}(T^0, \mathbb{C})$. La définition du laplacien

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$$

donnée par Favre et Jonsson utilise un point $t_0 \in T^0$ (racine), auquel elle fait jouer un rôle particulier; ceci n'est toutefois pas une restriction (voir le dernier paragraphe ci-dessous). Ayant donc choisi t_0 , nous pouvons comparer les opérateurs dd^c et Δ sur \mathcal{P} .

PROPOSITION 5.4.2. — *Pour toute fonction $g \in \mathcal{P}$,*

$$\text{dd}^c g = g(t_0) \delta_{t_0} - \Delta g.$$

Démonstration. Il existe un cône réel \mathcal{P}^+ dans \mathcal{P} tel que

- toute fonction réelle g appartenant à \mathcal{P} peut s'écrire comme la différence de deux éléments de \mathcal{P}^+ (décomposition de Jordan, Theorem 7.59),
- l'application linéaire $\Delta : \mathcal{P}^+ \rightarrow \mathcal{M}$ est continue lorsque \mathcal{P}^+ est muni de la topologie de la convergence simple sur T^0 , \mathcal{M} de celle de la convergence faible des mesures.

Le sous-ensemble $A^0(T) \cap \mathcal{P}^+$ étant dense dans \mathcal{P}^+ (c'est évident sur la description de \mathcal{P}^+ contenue dans la définition 7.55 de [16]), la preuve de la formule de l'énoncé est réduite au cas de deux fonctions de $A^0(T)$; la formule de symétrie mentionnée précédemment conduit finalement à établir l'identité

$$\int_T \psi \text{dd}^c \varphi = \varphi(t_0) \psi(t_0) - \int_T \psi \Delta \varphi$$

pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in A^0(T)$. C'est très exactement le contenu des formules (7.20) et (7.21) de [16]. \square

Remarque 5.4.3. — Les définitions de Favre et Jonsson, spécialisées à l'arbre réel \mathbb{R} , muni de la paramétrisation $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty]$, $x \mapsto 1 + |x|$ et de racine 0, ne redonnent pas le laplacien usuel d^2/dx^2 : \mathcal{P}^+ est l'ensemble des fonctions réelles continues qui sont concaves sur chaque composante connexe de $\mathbb{R} - \{0\}$ et Δ est la forme linéaire $-d^2/dx^2 + e_0 \delta_0$ sur \mathcal{P}^+ , e_0 désignant l'évaluation au point 0; par exemple : $\Delta(1) = \delta_0$.

Les potentiels sont utilisés, dans [16], pour définir une application bilinéaire

$$\mathcal{M}^+ \times \mathcal{M}^+ \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{+\infty\}, \quad (\mu, \mu') \mapsto \int_T g_\mu \, d\mu',$$

où g_μ désigne l'élément de \mathcal{P}^+ tel que $\Delta g_\mu = \mu$; la formule

$$\int_T g_\mu \, d\mu' = \int_T g_\mu \Delta g_{\mu'} = g_\mu(t_0) g_{\mu'}(t_0) - \int_T g_\mu \text{dd}^c g_{\mu'}$$

montre que cette application bilinéaire est celle étudiée à la section 3.5.

Ainsi que C. Favre l'a expliqué à l'auteur, la théorie du potentiel élaborée dans [16] ne dépend pas de façon essentielle du choix d'une racine et peut par ailleurs aisément se généraliser au cas d'un *graphe réel métrisé* G , c'est-à-dire un espace topologique connexe dans lequel tout point possède un voisinage ouvert U homéomorphe à un arbre réel métrisé (muni de la topologie faible) et tel que $\partial U = \overline{U} - U$ soit un ensemble fini, les métriques coïncidant sur les intersections. Considérons tout d'abord un arbre réel métrisé (connexe) T ; le choix d'un d'un point dans T^0 permet de munir T d'une structure d'arbre paramétré. Il est possible de définir un faisceau $\underline{\mathcal{P}}$ sur T de la manière suivante :

- (i) un ouvert connexe $U \subset T$ est dit *distingué* si ∂U est un sous-ensemble fini non vide de T^0 ;

- (ii) les ouverts distingués et les inclusions définissent un site \underline{T} muni d'un morphisme canonique $\pi : \underline{T} \rightarrow |T|$, où $|T|$ est le site défini par l'espace topologique T , puisque tout point de T admet un système fondamental de voisinages constitué d'ouverts distingués ,
- (iii) étant donné un ouvert distingué $U \subset T$ et un point $u \in \partial U$, (\overline{U}, u) est un arbre paramétré et on vérifie que l'espace vectoriel complexe des potentiels sur (\overline{U}, u) est indépendant du choix de u ; on le note $\underline{\mathcal{P}}(U)$;
- (iv) on établit que la correspondance $U \mapsto \underline{\mathcal{P}}$ est un *faisceau* sur \underline{T} et note \mathcal{P} le faisceau $\pi_* \underline{\mathcal{P}}$ sur $|T|$;
- (v) désignant maintenant par \mathcal{M} le faisceau des mesures de Radon sur $|T|$, le laplacien Δ est le morphisme de faisceaux

$$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{M}$$

ainsi défini : pour tout ouvert distingué $U \subset T$ et toute fonction $g \in \mathcal{P}(U)$, $\Delta(g)$ est la restriction à U de la mesure $\Delta_{(\overline{U}, u)}(g)$ sur \overline{U} , u étant un point de ∂U et $\Delta_{(\overline{U}, u)}$ étant le laplacien sur l'arbre réel paramétré (\overline{U}, u) défini dans [16] ; le choix du point u ne joue pas de rôle.

Le cas d'un graphe réel métrisé se déduit de ce qui précède par recollement.

Remarquons enfin explicitement que le théorème de réduction semi-stable permet de munir toute courbe analytique propre et lisse sur un corps non archimédien, non trivial et algébriquement clos, d'une structure de graphe réel métrisé (cf. [3], Chapter 4).

Bibliographie

- [EGA] A. GROTHENDIECK *Éléments de Géométrie Algébrique*, Chap. I-IV, rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, (1960-1967).
- [1] L. AHLFORS *Complex Analysis : An introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, second edition, McGraw-Hill Book Co. (1966)
- [2] P. AUTISSIER Points entiers sur les surfaces arithmétiques, *J. für die reine und angewandte Mathematik* **531** (2001), pp.201-235
- [3] V.G. BERKOVICH *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol.33, American Mathematical Society, Providence, RI, 1990
- [4] V.G. BERKOVICH Étale cohomology for non-Archimedean analytic spaces, *Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques*, **78** (1993), pp.5-161
- [5] V.G. BERKOVICH Smooth p-adic spaces are locally contractible. II, in *Geometric Aspects of Dwork Theory*, Walter de Gruyter & Co, 2004, pp.293-370
- [6] S. BLOCH, H. GILLET AND C. SOULÉ Non-Archimedean Arakelov theory, *J. Algebraic Geom.*, **4** (1995), pp.427-485
- [7] S. BOSCH Une remarquable propriété des espaces affinoïdes, *Mathematische Annalen*, **229** 1977, pp.5-45
- [8] S. BOSCH, U. GÜNTZER, R. REMMERT *Non- Archimedean Analysis. A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 261, Springer-Verlag, 1984
- [9] S. BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT Stable reduction and uniformization of abelian varieties. I., *Mathematische Annalen*, **270** (1985) pp. 349-379
- [10] S.BOSCH, W. LÜTKEBOHMERT Formal and rigid geometry. I. Rigid spaces, *Mathematische Annalen*, **295** (1993), pp. 291-317
- [11] J.-B. BOST Potential theory and Lefschetz theorems for arithmetic surfaces, *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, **32** (1999) pp. 241-312
- [12] A. CHAMBERT-LOIR Mesures et équidistribution sur les espaces de Berkovich, *J. für die reine und angewandte Mathematik*, à paraître preprint, arXiv :math.NT/034023 v3 (version du 12 nov. 2004)
- [13] T. CHINBURG AND R. RUMELY The capacity pairing, *J. für die reine und angewandte Mathematik* **434** (1992), pp. 1-44
- [14] T. CHINBURG, C.-F. LAU AND R. RUMELY Capacity theory and arithmetic intersection theory, *Duke Math. J.* **117** (2003), pp.229-285.
- [15] C. FAVRE *Arbres réels et Espaces de Valuations*, Thèse d'habilitation, Université Paris 7 (2005)
- [16] C. FAVRE AND M. JONSSON *The valuative tree*, Lecture Notes in Mathematics 1853, Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [17] W. GUBLER Local heights of subvarieties over non-Archimedean fields, *J. für die reine und angewandte Mathematik* **548** (2002), pp.61-113
- [18] E. KANI Potential theory on curves, in *Théorie des nombres (Quebec, PQ 1987)*, pp.475-543, W. de Gruyter, 1989
- [19] M. KLIMEK *Pluripotential theory*, London Mathematical Society Monographs. New Series, 6. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, 1991
- [20] B. LE STUM *Workshop on Berkovich Theory, Introduction and examples*, texte d'exposé disponible sur la page [http ://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/preprints.html](http://perso.univ-rennes1.fr/bernard.le-stum/preprints.html)
- [21] W. LÜTKEBOHMERT Formal-algebraic and rigid-analytic geometry, *Math. Ann.*, **286** (1990), pp.341-371
- [22] V. MAILLOT Géométrie d'Arakelov des variétés toriques et fibrés en droites intégrables, *Mémoires de la société mathématique de France* **80** (2000)

- [23] YU I. MANIN p -adic automorphic functions, *Current problems in mathematics*, **3** (1974) Nauk. Akad. SSSR, pp.279-333
- [24] A. NÉRON Quasi-fonctions et hauteurs sur les variétés abéliennes, *Annals of Mathematics*, **82** (1985), pp. 249-331
- [25] M. RAYNAUD Géométrie analytique rigide d'après Tate, Kiehl,..., in *Table ronde d'analyse non archimédienne*, *Bulletin de la société mathématique de France*, Mémoire **39-40** (1974) , pp. 319-327
- [26] R. RUMELY *Capacity theory on algebraic curves*, Lectures Notes in Mathematics 1378, 1989
- [27] R. RUMELY On the relation between Cantor's capacity and the sectional capacity, *Duke Mathematical Journal*, **70** (1993), pp.517-574
- [28] R. RUMELY An intersection pairing for curves, with analytic contributions from non-Archimedean places, *Number Theory (Halifax, NS, 1994)*, American Mathematical Society, pp. 325-357
- [29] R. RUMELY AND M. BAKER Analysis and dynamics on the Berkovich projective line, preprint, arXiv :math.NT/0407433 (26 juillet 2004)
- [30] L. SZPIRO, T. TUCKER AND J. PINEIRO Mahler measure for dynamical systems on P^1 and intersection theory on a singular arithmetic surface, in *Progress in Math Birkhauser*, **235**, 2004.
- [31] M. VAN DER PUT The class group of a one-dimensional affinoid space, *Annales de l'institut Fourier*, **30** (1980), pp. 155-164
- [32] S.-W. ZHANG Admissible pairing on a curve, *Inventiones mathematicae*, **112** (1993), pp. 171-193
- [33] S.-W. ZHANG Small points and adelic metrics, *Journal of Algebraic Geometry*, **4** (1995), pp. 281-300

Table des matières

Introduction	i
1. Polyèdres entiers	1
1.1. Généralités	1
1.1.1. Polytopes.....	1
1.1.2. Polyèdres.....	2
1.2. Théorie du potentiel sur les polyèdres de dimension 1	4
1.2.1. Fonctions harmoniques.....	4
1.2.2. Propriétés.....	7
1.2.3. Problèmes de Dirichlet et de Neumann.....	9
1.2.4. Rétractions.....	11
1.2.5. Distributions.....	12
2. Fonctions harmoniques sur une courbe strictement k-analytique lisse	15
2.1. Résultats préliminaires	15
2.1.1. Schémas formels et espaces analytiques.....	16
2.1.2. Bords.....	21
2.1.3. Courbes strictement k -analytiques.....	22
2.2. S-courbes semi-stables	30
2.2.1. Courbes $\mathfrak{S}(a)$	30
2.2.2. Le squelette d'une S -courbe simplement semi-stable : début.....	35
2.2.3. Le squelette d'une S -courbe simplement semi-stable : fin.....	40
2.2.4. Polygones de Newton généralisés.....	45
2.2.5. Morphismes entre S -courbes semi-stables.....	47
2.3. Fonctions harmoniques	51
2.3.1. L'espace $H(\mathcal{X})$	51
2.3.2. Le théorème de réduction semi-stable.....	53
2.3.3. Le faisceau \mathcal{H}_X	55
2.3.4. Le préfaisceau $\log \mathcal{O}_X^\times $	57
3. Théorie du potentiel	61
3.1. Le problème de Dirichlet	61
3.1.1. Propriétés fondamentales des fonctions harmoniques.....	61
3.1.2. Fonctions sous-harmoniques.....	62
3.1.3. La méthode de Perron.....	65
3.2. Fonctions lisses, opérateur dd^c	68
3.2.1. Les faisceaux A_X^0 et A_X^1 sur X_G	68
3.2.2. Un résultat de densité.....	70
3.2.3. Fonctorialités.....	72
3.2.4. L'opérateur dd^c	73
3.3. Courants et fonctions de Green	77
3.3.1. Les espaces de courants.....	77
3.3.2. Fonctions de Green élémentaires.....	80
3.3.3. La formule de Poincaré-Lelong.....	87
3.4. Fonctions sous-harmoniques et mesures de Radon positives	89

3.4.1. Le théorème d'approximation.....	89
3.4.2. Parties polaires.....	92
3.4.3. Courants positifs.....	93
3.5. Espace $W^1(X)$ et énergie.....	99
3.6. Capacités.....	106
3.6.1. Capacité relative.....	106
3.6.2. Métriques capacitaires sur $(\Omega_X^1)^\vee$	116
3.6.3. Exemple et application.....	121
4. Application à la théorie d'Arakelov.....	127
4.1. Diviseurs d'Arakelov.....	127
4.1.1. Conventions.....	127
4.1.2. Diviseurs d'Arakelov lisses.....	128
4.1.3. Produit.....	130
4.1.4. Diviseurs d'Arakelov W^1 -réguliers.....	133
4.1.5. Les groupes $\widehat{CH}^1(X; A^0)$ et $\widehat{CH}^1(X; W^1)$	137
4.1.6. Fonctorialités.....	139
4.1.7. Produit d'intersection sur $\widehat{CH}^1(X; W^1)$	144
4.2. Faisceaux inversibles métrisés.....	147
4.2.1. Situation locale.....	147
4.2.2. Situation globale.....	151
4.2.3. Hauteurs et formule de Mahler généralisée.....	152
4.2.4. Convergence de métriques.....	154
4.2.5. Métriques sous-harmoniques.....	155
4.3. Comparaison avec d'autres approches de la théorie d'Arakelov.....	159
4.3.1. Utilisation d'un modèle entier.....	159
4.3.2. Métriques adéliques.....	162
4.3.3. Théorème de Hilbert-Samuel arithmétique.....	163
4.3.4. Capacités arithmétiques.....	166
5. Annexe : Comparaison avec d'autres approches.....	169
5.1. Comparaison avec l'approche de R. Rumely.....	169
5.2. Comparaison avec l'approche de R. Rumely et M. Baker....	176
5.3. Comparaison avec l'approche de E. Kani.....	176
5.4. Comparaison avec l'approche de C. Favre et M. Jonsson....	177
Bibliographie.....	181
